Föreläsning 5:

Rationella funktioner:

Repetition: En funktion $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ($f(x), g(x)$ polynom) kallas *rationell funktion*.

Problem: Bestäm $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$!

Steg I (Polynomdivision)

Om $\deg f(x) \geq \deg g(x)$ så utför vi polynomdivision, dvs. $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Vi får
$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}\,dx$$

$\int q(x)\,dx$ beräknas "lätt"; återstår $\int \frac{r(x)}{g(x)}\,dx$

där $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Steg II (Faktorisering)

Faktorisera nämnaren $g(x)$ så långt det går i *reella* första- och andragradsfaktorer.

Ex (I+II): $Q(x) = \frac{x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 14x^2 + x + 13}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}$

I) Polynomdivision ger

$$Q(x) = x^2 - 1 + \frac{4x+4}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}$$

II) Vi faktoriserar nämnaren. Gissar nollställe $x = 1$.

$\overset{\text{F.S.}}{\Longrightarrow}$ $x - 1$ delar $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$. Pol.div. ger

$$x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = (x-1)(x^2 + 6x + 9) = (x-1)(x+3)^2$$

$$\Rightarrow \frac{r(x)}{g(x)} = \frac{4x+4}{(x-1)(x+3)^2}$$

Steg III (Partialbråksuppdelning)

Vi partialbråksuppdelar $\frac{r(x)}{g(x)}$.

Ex: $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{(1+x) - x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

Ovanligt "lätt" exempel – använder trick!

Allmän metod:

Ex (forts.): Partialbråksuppdela $\frac{4x+4}{(x-1)(x+3)^2}$!

Ansätt
$$\frac{4x+4}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$$
(A, B, C konstanter)

Multiplicera bägge led med $(x-1)(x+3)^2$:

$$4x + 4 = A(x+3)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x-1) \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4 = (A+B)x^2 + (6A + 2B + C)x + (9A - 3B - C)$$

Identifiering av koefficienter ger

$$(*') \begin{cases} A + B = 0 \\ 6A + 2B + C = 4 \\ 9A - 3B - C = 4 \end{cases}$$

Linjärt ekv. system. Det går att använda Gausselimination (läs i så fall ~~kap.~~ läs kap. 3.3 själv), annars använder vi "handpåläggning":

Sätt in $x = 1$, $x = -3$ i $(*)$

$x = 1$: $4 \cdot 1 + 4 = A(1+3)^2 + B \cdot 0 + C \cdot 0$

$\Leftrightarrow 16A = 8 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$

$x = -3$: $4 \cdot (-3) + 4 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot (-3 - 1)$

$\Leftrightarrow -4C = -8 \Leftrightarrow C = 2$

Ersätt nu i $(*')$:

Detta ger systemet
$$\begin{cases} \frac{1}{2} + B = 0 \\ 6 \cdot \frac{1}{2} + 2B + 2 = 4 \\ 9 \cdot \frac{1}{2} - 3B - 2 = 4 \end{cases}$$

vilket ger $B = -\frac{1}{2}$. Således $(*') \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \\ C = 2 \end{cases}$

Vi får
$$\frac{4x+4}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+3} + 2 \cdot \frac{1}{(x+3)^2}$$

Ansätter vi rätt hittar vi *alltid entydig lösning* till systemet.

Steg IV (Bestäm primitiva funktioner)

Ex (forts.):
$$\int \frac{x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 14x^2 + x + 13}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}\,dx =$$
$$= \int x^2 - 1\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+3}\,dx +$$
$$+ 2\int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx = \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+3| - \frac{2}{x+3} + C.$$

Ex (I-IV): Bestäm $\int \frac{x^2 + 3x + 5}{x^4 - 2x^3 + 5x^2}\,dx$!

I) Redan klart! $\deg f(x) < \deg g(x)$.

5

II) $$\int \frac{x^2+3x+5}{x^4-2x^3+5x^2}\,dx = \int \frac{x^2+3x+5}{x^2\underbrace{(x^2-2x+5)}_{\text{irr. över } \mathbb{R}}}\,dx$$

III) Partialbråksuppdelning:

Ansätt $$\frac{x^2+3x+5}{x^2(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+5}$$ OBS!

$$\Leftrightarrow\ x^2+3x+5 = Ax(x^2-2x+5)+B(x^2-2x+5)+(Cx+D)x^2$$

$$\Leftrightarrow\ x^2+3x+5 = (A+C)x^3+(-2A+B+D)x^2+(5A-2B)x+5B$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ -2A+B+D = 1 \\ 5A-2B = 3 \\ 5B = 5 \end{cases} \overset{\text{(enkla räkningar)}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -1 \\ D = 2 \end{cases}$$

IV) $$\int \frac{x^2+3x+5}{x^4-2x^3+5x^2}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx +$$

$$+ \int \frac{-x+2}{x^2-2x+5}\,dx \overset{(*)}{=} \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$

(*) $\int \frac{-x+2}{x^2-2x+5}\,dx$ bestämmer vi på följande sätt:

$$\int \frac{-x+2}{x^2-2x+5}\,dx \overset{\text{kvad. kompl.}}{=} \int \frac{-x+2}{(x-1)^2+4}\,dx =$$

alltid positiv!

6

$$= \left[\begin{array}{l} t = x-1 \Leftrightarrow x = t+1 \\ \frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow dx = dt \end{array}\right] = \int \frac{-(t+1)+2}{t^2+4}\,dt =$$

$$= \int \frac{-t+1}{t^2+4}\,dt = \int \frac{-t}{t^2+4}\,dt + \int \frac{1}{t^2+4}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+4}\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{t}{2})^2+1}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(t^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t}{2}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.$$

Anm: $\int \frac{Bx+C}{(x^2+ax+b)^n}\,dx$, där $n \geq 2$ och x^2+ax+b är irreducibel över $\mathbb{R}$ kan bestämmas med en rekursionsformel, men ingår ej i kursen.

- - - - - - - - - - - -

Ex: $$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t \\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\,dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \int \frac{(1+t)-t}{t(t+1)}\,dt = \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\,dt =$$

rat. funk i t

7

$$= \ln|t| - \ln|t+1| + C = \ln(e^x) - \ln(e^x+1) + C =$$

$$= x - \ln(e^x+1) + C$$

Ex: $$I(x) = \int \overset{g(x)}{e^{3x}}\,\overset{f(x)}{\cos x}\,dx = e^{3x}\sin x - 3\int \overset{g(x)}{e^{3x}}\,\overset{f(x)}{\sin x}\,dx =$$

$$= e^{3x}\sin x - 3\left(e^{3x}(-\cos x) - 3\int e^{3x}(-\cos x)\,dx\right) =$$

$$= e^{3x}\sin x + 3e^{3x}\cos x - 9\underbrace{\int e^{3x}\cos x\,dx}_{=I(x)}$$

$$\Leftrightarrow\ 10\,I(x) = e^{3x}\sin x + 3e^{3x}\cos x + C$$ OBS!

$$\Leftrightarrow\ I(x) = \frac{e^{3x}}{10}(\sin x + 3\cos x) + C_1 \qquad \left(C_1 = \frac{C}{10}\right)$$

Ex (fr. förra förel.):

$$\int \sin 2x\, e^{\sin x}\,dx = \int 2\sin x\cos x\, e^{\sin x}\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ \frac{dt}{dx} = \cos x \Rightarrow dt = \cos x\,dx \end{array}\right] = \int 2te^t\,dt =$$

$$\overset{\text{part.int.}}{=} 2te^t - \int 2e^t\,dt = 2te^t - 2e^t + C =$$

$$= 2\sin x\, e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C = 2e^{\sin x}(\sin x - 1) + C$$