(1)

Föreläsning 4:

Def: Låt f vara en funktion definierad på ett intervall I. Vi säger att F är en primitiv funktion till f (på I) om

$$F'(x) = f(x) \quad \text{på } I.$$

Ex: $f(x) = 3\cos 3x$. En primitiv funktion ges av

$$F(x) = \sin 3x, \quad \text{ty}$$

$$F'(x) = D\sin 3x = 3\cos 3x = f(x).$$

OBS! T.ex. $F(x) = \sin(3x) + 5$ är också en primitiv funktion.

Sats: Om F och G är två primitiva funktioner till f så är $G(x) = F(x) + C$, C konstant.

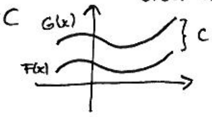
Bevis: Vi ser att

$$(G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow (G-F)(x) = G(x) - F(x) = C \quad \text{(konstant)}$$

enl. tidigare sats

$$\Rightarrow G(x) = F(x) + C$$



$\square$

(2)

Att hitta en primitiv funktion är alltså det "omvända deriveringsproblemet".

Kan man alltid hitta en primitiv funktion?

– Nej, men varje kontinuerlig funktion har en primitiv funktion (visas senare)

Def: En godtycklig primitiv funktion till f betecknas

$$\int f(x)\,dx$$

← differential av x

(Konstanten C är "inbakad" i uttrycket.)

Ex:
$$\int 3\cos 3x\,dx = \sin(3x) + C$$

OBS!

Hur beräknar man prim. funktioner i praktiken?

– Standardprimitiver + räkneregler

Ex:
$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

derivata till nämnare

OBS!

(3)

Vi kan alltid "kompensera" för en konstant inre derivata:

Ex:
$$\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan(2x) + C$$

kompenserar

OBS! Bara konstant inre derivata.

Ex:
$$\int e^{x^2}\,dx \neq \frac{e^{x^2}}{2x} + C$$

Varför? – Jo, deriverar vi $\frac{e^{x^2}}{2x}$ måste vi använda kvotregeln och får

$$D\,\frac{e^{x^2}}{2x} = \frac{2x e^{x^2}\cdot 2x - 2e^{x^2}}{4x^2} = \frac{e^{x^2}(2x^2-1)}{2x^2} \neq e^{x^2}$$

Hjälpmedel för att bestämma primitiva funktioner:

I) Variabelbyte (bygger på kedjeregeln):

Låt F vara primitiv till f.

inre derivata

Kedjeregeln: $\quad (F(g(t)))' = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))\cdot g'(t)$

$$\Rightarrow \int (F(g(t)))'\,dt = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{F(g(t)) + C = \int f(g(t))g'(t)\,dt}$$

(4)

Hur går variabelbyte till?

Antag att vi vill beräkna $\int f(x)\,dx$. Gör vi då variabelbytet $x = g(t)$ får vi

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C \overset{x=g(t)}{=} F(g(t)) + C = \int f(g(t))g'(t)\,dt}$$

Ex: $(x>1)$

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \left[\begin{array}{l} \text{sätt } t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t = g(t) \\ \Rightarrow g'(t) = e^t \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{1}{e^t\cdot t}\cdot e^t\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C =$$

$$= \ln|\ln x| + C = \ln(\ln x) + C$$

återgång till x $\qquad x>1$

Anm: Antag $x = g(t)$ som ovan. Vi får då, om vi betecknar derivatan med $\frac{dx}{dt}$,

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \quad \text{och} \quad f(g(t))g'(t)\,dt = f(g(t))\frac{dx}{\cancel{dt}}\cancel{dt}$$

$$= f(x)\,dx$$

(5)

Slutsats: En minnesregel – vi kan "räkna med" differentialerna i $\frac{dx}{dt}$.

Ex: $(x>0)$ $$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{x} \iff x=t^2 \ (t>0) \\ \frac{dx}{dt}=2t \Rightarrow dx = 2t\,dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{1}{t^2+t}\cdot 2t\,dt = \int \frac{2}{t+1}\,dt =$$

$$= 2\ln|t+1| + C = 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

återgång till x.

Variabelbyte utförs ibland lättare på "andra hållet":

Ex: $$\int x e^{x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} t=x^2, \ \frac{dt}{dx}=2x \\ \Rightarrow dt = 2x\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}dt = x\,dx \end{array}\right] =$$

$x\,dx$

$$= \int \frac{1}{2}e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

II) Partialintegration (bygger på derivata av produkt)

Låt F vara en primitiv till f.

(6)

Produktregeln: $$(F(x)g(x))' = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

$$\Rightarrow \int (F(x)g(x))'\,dx = \int \big(f(x)g(x) + F(x)g'(x)\big)\,dx = \int f(x)g(x)\,dx + \int F(x)g'(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int f(x)g(x)\,dx = \int (F(x)g(x))'\,dx - \int F(x)g'(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx}$$

Allmän strategi: $F(x)g'(x)$ ska vara enklare att hitta en primitiv funktion till än $f(x)g(x)$.

Ex: $$\int \underbrace{x}_{g(x)}\cdot \underbrace{\sin x}_{f(x)}\,dx = x(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

(Om f & g väljs tvärtom, får vi en svårare primitiv)

(7)

Ex: $$\int \underbrace{x^2}_{g(x)}\underbrace{e^x}_{f(x)}\,dx = x^2e^x - \int \underbrace{2x}_{g(x)}\underbrace{e^x}_{f(x)}\,dx =$$

$$= x^2e^x - \left(2xe^x - \int 2\cdot e^x\,dx\right) =$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2-2x+2) + C$$

Anm: Det är lätt att kolla om en primitiv är korrekt uträknad – bara derivera!

$$D\left(e^x(x^2-2x+2)\right) \overset{\text{prod.regeln}}{=} e^x(x^2-2x+2) + e^x(2x-2) =$$

$$= e^x\big((x^2-2x+2)+(2x-2)\big) = x^2e^x \quad \text{ok!}$$