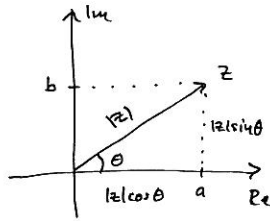


Föreläsning 2

①

Komplexa tal på polär form:

$$z = a + bi = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$



Vi definierade förra gången

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

så $z = a + bi = |z|e^{i\theta}$, $\theta = \arg z$

Varför just $e^{i\theta}$?

Ex: $\overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$

Ex: $|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$

Ex (sats): $\frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{\overline{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}\overline{e^{i\theta}}} = \frac{e^{-i\theta}}{|e^{i\theta}|^2} = \frac{e^{-i\theta}}{1} = e^{-i\theta}$

Verkar rimligt!

Sats: $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

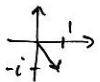
Sats (De Moivre's formel): $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, $n \geq 0$
n heltal

Anm: Fungar även då $n < 0$, t.y

$$(e^{i\theta})^{-n} = \frac{1}{(e^{i\theta})^n} = \frac{1}{e^{in\theta}} = e^{-in\theta}, \quad n > 0$$

Slutsats: $e^{i\theta}$ följer vanliga räkelagar för potenser!

Ex: $(1-i)^{10} = (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^{10} = (\sqrt{2})^{10}e^{-i\frac{\pi}{4} \cdot 10} = 2^5 e^{i(-\frac{\pi}{2} - 2\pi)} = 32e^{-i\frac{\pi}{2}} = 32 \cdot \frac{1}{-i} = -32i$



Eulers formler:

$$\begin{cases} ① & e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ ② & e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$$

$\frac{①+②}{2}$ ger

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$\frac{①-②}{2i}$ ger

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Bevis: $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$

$$= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad \square$$

Antag att vi multiplicerar två komplexa tal på polär form: $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$, $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|e^{i\theta_1} \cdot |z_2|e^{i\theta_2} = (|z_1||z_2|) \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Vid multiplikation multiplieras längder och adderar argument

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right) e^{i\theta_1} \cdot \frac{1}{e^{i\theta_2}} = \left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right) \cdot e^{i\theta_1} \cdot e^{-i\theta_2} = \left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right) \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Vid division divideras längder och subtraheras argument

Upprepar vi formeln för multiplikation n ggr. får vi

Ex: $\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 =$

$$= \frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} + 2\underbrace{e^{ix} \cdot e^{-ix}}_{=e^0=1}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2} \quad (\text{dfr. formeln } \cos 2x = 2\cos^2 x - 1)$$

Audragradsekvationer (med komplexa koef.):

Ex (repetition): $x^2 + 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$$x = -1 \pm \sqrt{-4} \Leftrightarrow x = -1 \pm 2i$$

Vi får däremot problem om vi har komplexa koef., t.ex.

$$z^2 = 1 - \sqrt{3} \cdot i \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{1 - \sqrt{3} \cdot i}$$

Vi vet ej vad $\sqrt{1 - \sqrt{3} \cdot i}$ betyder! Gär ej!

Rätt metod: Sätt $z = a + bi$. Detta ger

$$z^2 = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$$

Vi får $z^2 = 1 - \sqrt{3} \cdot i \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = 1 - \sqrt{3} \cdot i$

Re, Im likar $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = -\sqrt{3} \end{cases}$

Dessutom gäller $|z^2| = |z|^2 = |1 - \sqrt{3} \cdot i| = 2$, (5)

och då $|z|^2 = a^2 + b^2$ får vi att $a^2 + b^2 = 2$
(Hjälpekvation)

Sammantfattningsvis vill vi lösa

$$\begin{cases} \textcircled{1} & a^2 - b^2 = 1 & \vdots & \textcircled{1} + \textcircled{2} \\ \textcircled{2} & a^2 + b^2 = 2 & \vdots & \textcircled{2} - \textcircled{1} \\ \textcircled{3} & zab = -\sqrt{3} & \vdots & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 3 \\ 2b^2 = 1 \\ a = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \\ b = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Ekv. (3) ger att a och b har olika tecken!

Detta ger Svar: $z = a + bi = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$ eller
 $z = -\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

Alt. lösning (polärform): $z^2 = 1 - \sqrt{3} \cdot i$

Skriv om VL och HL på polär form:

$$\begin{cases} z = |z|e^{i\theta} \Rightarrow z^2 = |z|^2 e^{i2\theta} \\ 1 - \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

Detta ger ekv. $|z|^2 e^{i2\theta} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 2 & \text{(abs. belopp lika)} \\ 2\theta = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k & \text{(argument lika)} \end{cases} \leftarrow \text{OBS!}$$

Svar: $z_1 = w_1 + \frac{(3-i)}{2} = 4 - 2i + \frac{3}{2} - \frac{i}{2} = \frac{11}{2} - \frac{5}{2}i$ (7)

$z_2 = w_2 + \frac{(3-i)}{2} = -4 + 2i + \frac{3}{2} - \frac{i}{2} = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$

Binomiska ekvationer (polära metoden):

$$z^n = w \quad (w \text{ komplex tal})$$

Ex: Lös ekvationen $z^6 = \sqrt{3} + i$!

Lösn.: Sätt $z = |z|e^{i\theta} \Rightarrow z^6 = |z|^6 e^{i6\theta}$

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = 2 \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Detta ger $z^6 = \sqrt{3} + i \Leftrightarrow |z|^6 e^{i6\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^6 = 2 \\ 6\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[6]{2} \\ \theta = \frac{\pi}{36} + \frac{\pi}{3}k \end{cases} \leftarrow \text{OBS!}$$

så ~~.....~~ $z_k = \sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{36} + \frac{\pi}{3}k\right)}$, k heltal

är lösningar.

Vi får bara olika lösningar för $k=0,1,2,3,4,5$
(6 stycken!) eftersom $k=6$ ger vinkeln

$$\frac{\pi}{36} + \frac{\pi}{3} \cdot 6 = \frac{\pi}{36} + 2\pi \leftarrow \text{nytt varv!}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[6]{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \text{ heltal}, \end{cases} \quad \textcircled{6}$$

vilket ger lösningarna $z_k = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \pi k\right)}$, k heltal

OBS! Bara $k=0,1$ ger olika lösningar.

Svar: $z_0 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$
 $= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

$z_1 = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \pi\right)} = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}}$
 $= \sqrt{2} \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

Ex: Lös $z^2 - (3-i)z - 10 + \frac{29}{2}i = 0$ (*)

Lösning: $z^2 - (3-i)z - 10 + \frac{29}{2}i = \left(z - \frac{(3-i)}{2}\right)^2 - \frac{(3-i)^2}{4}$
 $- 10 + \frac{29}{2}i = \dots = \left(z - \frac{(3-i)}{2}\right)^2 - 12 + 16i$

(*) $\Leftrightarrow \underbrace{\left(z - \frac{(3-i)}{2}\right)^2}_{=w} = 12 - 16i \Leftrightarrow w^2 = 12 - 16i$

Vi löser $w^2 = 12 - 16i$ p.s.s. som ovan (övning!)

och får då $\begin{cases} w_1 = 4 - 2i \\ w_2 = -4 + 2i \end{cases}$ vilket ger

Svar: $z_k = \sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{36} + \frac{\pi}{3}k\right)}$, $k=0,1,2,3,4,5$. (8)

Anm.:

