

# Föreläsning 18

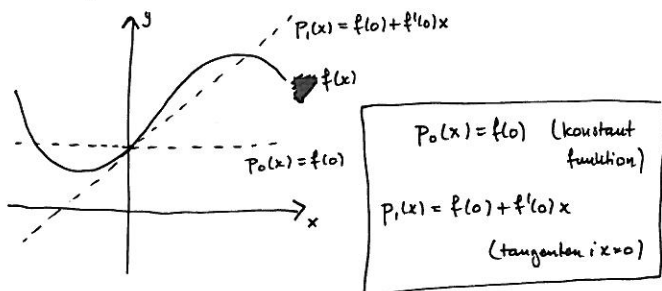
(1)

## Maclaurins och Taylors formler:

Funktionsvärden för polynom är "enklare" att beräkna,  
t.ex.  $f(x) = x^2 + x \Rightarrow f(0.2) = (0.2)^2 + 0.2 = 0.04 + 0.2 = \underline{0.24}$   
Men vad är t.ex.  $\sin(0.2)$ ?  $\ln(1.3)$ ?

### Approximera funktioner med polynom!

Antag att vi vill approximera en funktion  $f(x)$  nära  $x=0$ .



$P_0(x)$  har samma funktionsvärde som  $f$  i  $x=0$

$P_1(x)$  — " — funktionsvärde — " —  
och derivata

En ännu bättre approximation borde vara ett andra-  
gradspolynom med samma funktionsvärde som  $f$  i  $x=0$ .  
och derivata  
och andaderivata

Större  $n$  ger bättre approximation nära  $x=0$ . (3)

Ex: Betrakta  $f(x) = \sin x$ .

$f(x) = \sin x$	$f^{(4)}(x) = \sin x$	...
$f'(x) = \cos x$	$f^{(5)}(x) = \cos x$	...
$f''(x) = -\sin x$	$f^{(6)}(x) = -\sin x$	osv.
$f^{(3)}(x) = -\cos x$	$f^{(7)}(x) = -\cos x$	

Det gäller att 
$$\begin{cases} f^{(2m)}(x) = (-1)^m \sin x \\ f^{(2m+1)}(x) = (-1)^m \cos x \end{cases}, m \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f^{(2m)}(0) = (-1)^m \sin 0 = 0 \\ f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m \cos 0 = (-1)^m \end{cases}, m \geq 0$$

$$P_{2m+1}(x) = P_{2m+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

T.ex. får vi  $P_1(x) = x$

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Dessa polynom ger, i tur och ordning, allt bättre approximationer nära  $x=0$ .

Vi provar med

(2)

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

Koll:  $P_2(0) = f(0)$

$$P_2'(x) = f'(0) + f''(0)x \Rightarrow P_2'(0) = f'(0)$$

$$P_2''(x) = f''(0) \Rightarrow P_2''(0) = f''(0) \quad \text{OK!}$$

Fortsätt enligt samma princip:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Påminnelse:  $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k$

Polynomet  $P_n(x)$  har samma värde i  $x=0$  som  $f$  för varje derivata upp t.o.m. ordning  $n$ , och kallas Maclaurinpolynomet av ordning  $n$  till  $f$ .

Ex: Betrakta  $f(x) = e^x$ . Vi får

$$e^x = f(x) = f'(x) = f''(x) = f^{(3)}(x) = \dots \text{ osv.}$$

Således  $1 = e^0 = f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots$ , och

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = 1 + x, P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \dots \text{ osv.}$$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Ex: Vi har  $P_1(0.2) = 0.2$

(4)

$$P_3(0.2) = 0.2 - \frac{(0.2)^3}{6} \approx 0.198667$$

$$P_5(0.2) = 0.2 - \frac{(0.2)^3}{6} + \frac{(0.2)^5}{120} \approx 0.198693334$$

därför med  $\sin(0.2) = 0.1986693308\dots$

Frågor: - Vad menas med att approximationen blir bättre då polynomet's grad ökar?  
- Hur stort blir felet?

### Sats (Maclaurins formel):

Om  $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x)$  är kontinuerliga i en omgivning av  $x=0$ , gäller för alla  $x$  i denna omgivning att

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

där  $\beta$  är ett tal mellan 0 och  $x$ .

(alternativt uttryckt  $\beta = \theta x$  där  $0 \leq \theta \leq 1$ )

Beweis: Läs själva! (Överkurs)  $\square$

Allt skrivsätt  $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$

$$\text{där } R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$R_{n+1}(x)$  kallas Lagranges restterm.

Ex: Visa att  $e = 2.72 \pm 0.005$  ! (5)

Sätt  $f(x) = e^x$ . Vill beräkna  $f(1) = e^1 = e$ .

Maclaurins formel:  $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$ .

Sätt  $n=5, x=1$ :  $f(1) = P_5(1) + R_6(1)$

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} \quad (\text{se ovan!})$$

$$\Rightarrow P_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{163}{60}$$

Vidare  $R_6(x) = \frac{e^\beta}{6!} x^6$ ,  $\beta$  mellan 0 och  $x$ ,

$$\text{så } R_6(1) = \frac{e^\beta}{6!} = \frac{e^\beta}{720} \quad \text{där } 0 \leq \beta \leq 1.$$

Detta ger uppskattningen

$$0 \leq R_6(1) = \frac{e^\beta}{720} \leq \frac{e}{720} \leq \frac{3}{720} = \frac{1}{240},$$

$$\text{så } 2.717 \approx \frac{163}{60} \leq e \leq \frac{163}{60} + \frac{1}{240} \approx 2.721$$

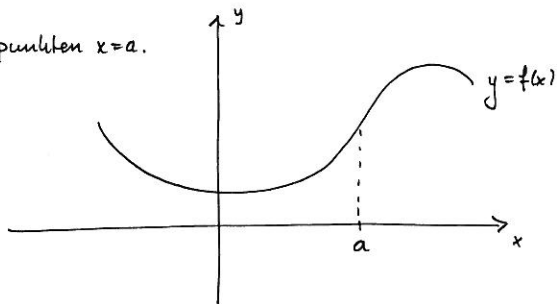
$$\text{och } e = 2.72 \pm 0.005.$$

Ex: Visa att  $\left| \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \right| \leq \frac{x^3}{3}$   
för alla  $0 \leq x \leq 1$ .

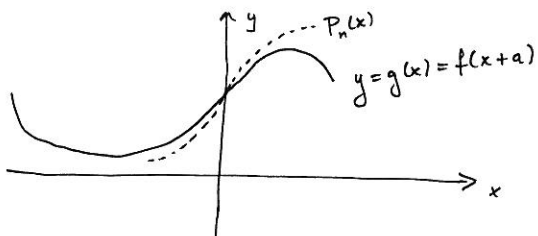
$$f(x) = \ln(1+x), \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Välj punkten  $x=a$ .



Flytta grafen  $a$  steg åt vänster!  $\leftarrow a$



Approximera den flyttade funktionen  $g(x)$  kring  $x=0$ :

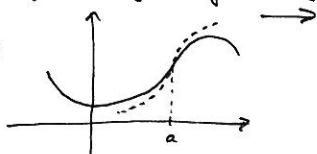
$$g(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x), \text{ dvs.}$$

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{g^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

där  $\beta$  mellan 0 och  $x$ .

Flytta tillbaka grafen (dvs. flytta  $a$  steg åt höger)!  $\rightarrow a$

Då gäller  $f(x) = g(x-a)$



Vi får (6)

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0x)}{6}x^3 = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1+\theta x)^3} x^3 \quad \text{där } 0 \leq \theta \leq 1. \end{aligned}$$

$$\left| \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \right| = \left| x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1+\theta x)^3} x^3 - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{3} \frac{1}{(1+\theta x)^3} x^3 \right| \underset{0 \leq x \leq 1}{=} \frac{1}{3} \frac{1}{(1+\theta x)^3} x^3 \leq \frac{x^3}{3} \text{ klart}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq \theta x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+\theta x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{(1+\theta x)^3} \leq 1$$

Anm: Vill vi få en uppskattning av

$$\ln(1.3)$$

kan vi sätta  $x=0.3$ .

$$P_2(x) = x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow P_2(0.3) = 0.3 - \frac{(0.3)^2}{2} = \underline{0.255}$$

Felet blir då högst  $\frac{(0.3)^3}{3} = 0.009$

Taylor's formel:

Ibland vill man approximera  $f$  kring en annan punkt än  $x=0$ .

$$f(x) = g(x-a) = g(0) + g'(0)(x-a) + \frac{g''(0)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}(x-a)^n + \frac{g^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (8)$$

$$+ \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}(x-a)^n + \frac{g^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

där  $\beta$  mellan 0 och  $x-a$ .

Eftersom  $g(x) = f(x+a)$  får vi

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) = f(x+a) \\ g'(x) = f'(x+a) \\ g''(x) = f''(x+a) \\ \vdots \\ g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x+a) \\ g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x+a) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(0) = f(a) \\ g'(0) = f'(a) \\ g''(0) = f''(a) \\ \vdots \\ g^{(n)}(0) = f^{(n)}(a) \\ g^{(n+1)}(\beta) = f^{(n+1)}(\beta+a) = \\ = f^{(n+1)}(\gamma) \end{array} \right.$$

Då  $\beta$  mellan 0 och  $x-a$ , följer att

$\gamma$  mellan  $a$  och  $x$ .

Taylor's formel:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{ där } \gamma \text{ mellan } a \text{ och } x.$$