Föreläsning 16

(1)

Linjär ekvation av andra ordningen:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x).$$

Vad betyder linjär?

Antag att vi har två linjära ekvationer

$$y''+a(x)y'+b(x)y=h_1(x), \quad y''+a(x)y'+b(x)y=h_2(x),$$

med samma vänsterled, men olika högerled. Antag vidare att y_1 är lösning till den första och y_2 lösning till den andra. Då är $\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2$ (λ_1,λ_2 tal) lösning till ekv.

$$y''+a(x)y'+b(x)y=\lambda_1 h_1(x)+\lambda_2 h_2(x). \quad (*)$$

Bevis: Sätt in $\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2$ i vänsterledet i $(*)$:

$$(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2)''+a(x)(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2)'+b(x)(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2)=$$

$$=\lambda_1 y_1''+\lambda_2 y_2''+a(x)\lambda_1 y_1'+a(x)\lambda_2 y_2'+b(x)\lambda_1 y_1+b(x)\lambda_2 y_2=$$

$$=\lambda_1(\underbrace{y_1''+a(x)y_1'+b(x)y_1}_{=h_1(x)})+\lambda_2(\underbrace{y_2''+a(x)y_2'+b(x)y_2}_{=h_2(x)})=$$

$$=\lambda_1 h_1(x)+\lambda_2 h_2(x). \quad \square$$

(2)

Ex: Eftersom $y_1=-\frac{x}{6}\cos 3x$ och $y_2=\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{27}$ löser ekv.

$$y''+9y=\sin 3x \quad \text{resp.} \quad y''+9y=3x^2-1 \quad \text{(kolla!)}$$

följer det att $y=y_1+y_2=-\frac{x}{6}\cos 3x+\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{27}$ löser ekv.

$$y''+9y=\sin 3x+3x^2-1 \quad \square$$

Sats: Antag att y_p är en lösning till ekvationen

$$y''+a(x)y'+b(x)y=h(x). \quad (*)$$

Då ges samtliga lösningar till $(*)$ av

$$y=y_h+y_p,$$

där y_h betecknar alla lösningar till motsvarande homogena ekvation $y''+a(x)y'+b(x)y=0$. $(*')$

Bevis: Låt y vara en godtycklig lösning till $(*)$. Eftersom även y_p är en lösning till $(*)$ följer det av linjäriteten att $y-y_p=y+(-1)y_p$ löser ekv.

$$y''+a(x)y'+b(x)y=h(x)+(-1)h(x)=0,$$

dvs. motsv. homogena ekvation $(*')$. Med beteckningen $y_h=y-y_p$ får vi $y=y_h+y_p$.

Omvänt, om y_h löser $(*')$ och y_p löser $(*)$, så kommer $y=y_h+y_p$ att lösa

$$y''+a(x)y'+b(x)y=0+h(x)=h(x), \text{ dvs. } (*). \quad \square$$

(3)

Anm: En lösning y_p till $(*)$ kallas för partikulärlösning.

Hur man beräknar partikulärlösningar:

$$\boxed{y''+ay'+by=h(x), \quad a,b \text{ konstanter}}$$

Vi delar upp i fall beroende på högerledet $h(x)$.

I) $h(x)$ = polynom (specialfall $h(x)$ konstant)

Ex: Hitta en lösning till ekvationen

$$y''-2y'+3y=8 \quad (*)$$

Vi provar med $y=C$, C konstant.

Då får vi $y'=y''=0$, och insättning i $(*)$ ger

$$0-2\cdot 0+3C=8 \iff C=\frac{8}{3} \quad \text{Svar: } y=\frac{8}{3}.$$

Ex: Hitta en lösning till $y''+4y'-y=2x+1$.

Prova att ansätta $y=Ax+B$ (samma grad som högerledet)

Vi får $y'=A$, $y''=0$, och

$$0+4A-(Ax+B)=2x+1 \iff -Ax+(4A-B)=2x+1$$

$$\iff \begin{cases}-A=2\\4A-B=1\end{cases} \iff \begin{cases}A=-2\\B=-9\end{cases}. \quad \text{Svar: } y=-2x-9.$$

Ex: Hitta en lösning till $y''-2y'=-4x+4$.

Vi ansätter återigen $y=Ax+B$, och får $y'=A$, $y''=0$.

(4)

$$0-2A=-4x+4 \quad \text{Går ej! } A \text{ är en konstant.}$$

Vi provar att ansätta en grad högre: $y=x(Ax+B)=Ax^2+Bx$.

Detta ger $y'=2Ax+B$, $y''=2A$, och

$$2A-2(2Ax+B)=-4x+4 \iff$$

$$-4Ax+(2A-2B)=-4x+4 \iff$$

$$\begin{cases}-4A=-4\\2A-2B=4\end{cases} \iff \begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}. \quad \text{Svar: } y=x^2-x.$$

Allmän princip: Ansätt samma grad som HL.
- om $b=0, a\neq 0$, multiplicera med x.
- om $a=b=0$, integrera 2 ggr.

Ex: Lös (dvs. hitta alla lösningar till)

$$y''-y'-2y=x^2-x-2.$$

Lösning: Lösningarna ges av $y=y_h+y_p$.

Bestäm y_h: Lös $y''-y'-2y=0$. (Föreläsning 15)

Kar. ekv. $p(r)=r^2-r-2=0 \iff r_1=-1$ eller $r_2=2$, ger lösn.

$$y_h=C_1e^{-x}+C_2e^{2x} \quad (C_1,C_2 \text{ konst.})$$

Bestäm y_p: Vi ansätter $y=Ax^2+Bx+C$ och får

(5)

$y' = 2Ax + B$, $y'' = 2A$. Insättning ger

$$2A - (2Ax+B) - 2(Ax^2+Bx+C) = x^2 - x - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad -2Ax^2 + (-2A-2B)x + (2A-B-2C) = x^2 - x - 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2A = 1 \\ -2A - 2B = -1 \\ 2A - B - 2C = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/2 \\ B = 1 \\ C = 0 \end{cases}$$

Detta ger $y_p = -\frac{1}{2}x^2 + x$

<u>Svar:</u> $y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + x$.

<u>Ex:</u> Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' - y' - 2y = x^2 - x - 2, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -3.$$

<u>Lösning:</u> Samma ekv. som ovan. Återstår bara att bestämma konstanterna.

$$y(0) = C_1 + C_2 - 0 + 0 = 1.$$

Vi får $y' = -C_1e^{-x} + 2C_2e^{2x} - x + 1$, och

$$y'(0) = -C_1 + 2C_2 - 0 + 1 = -3$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + 2C_2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

<u>Svar:</u> $y = 2e^{-x} - e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + x$.

(6)

II) $h(x) = \text{polynom} * e^{\alpha x}$ (α konstant)

Vi gör först substitutionen $y(x) = z(x)e^{\alpha x}$!

<u>Ex:</u> Hitta en lösning till $y'' + 3y' + 2y = (x+1)e^{2x}$. (*)

Sätt $y = ze^{2x}$. Detta ger

$$y' = z'e^{2x} + 2ze^{2x} = e^{2x}(z' + 2z)$$

$$y'' = z''e^{2x} + 2z'e^{2x} + 2z'e^{2x} + 4ze^{2x} =$$
$$= e^{2x}(z'' + 4z' + 4z) \quad \text{(produktregeln!)}$$

$$(*) \Leftrightarrow \cancel{e^{2x}}\Big((z''+4z'+4z) + 3(z'+2z) + 2z\Big) = (x+1)\cancel{e^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad z'' + 7z' + 12z = x + 1 \qquad \text{(Fall I)}$$

Vi ansätter $z = Ax + B$. Detta ger $z' = A$, $z'' = 0$, och

$$0 + 7A + 12(Ax + B) = x + 1$$

$$\Leftrightarrow 12Ax + (7A + 12B) = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 12A = 1 \\ 7A + 12B = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/12 \\ B = 5/144 \end{cases}$$ Vi får lösn. $z = \frac{1}{12}x + \frac{5}{144}$,

vilket ger $y = ze^{2x} = \left(\frac{1}{12}x + \frac{5}{144}\right)e^{2x}$.

<u>Svar:</u> $y = \left(\frac{1}{12}x + \frac{5}{144}\right)e^{2x}$.

III) $h(x) = \text{polynom} * \begin{cases} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{cases}$, där α konstant (och polynomet reellt)

(7)

<u>Ex:</u> Bestäm en lösning till ekv.

$$y'' + 9y = \sin 3x.$$

Vi löser först en <u>hjälpekvation</u>:

$$y'' + 9y = e^{i3x} \quad (= \cos 3x + i\sin 3x)$$

Hjälpekvationen tillhör fall II, så vi gör subst.

$y = ze^{i3x}$. Produktregeln ger

$$y' = z'e^{i3x} + 3ize^{i3x} = e^{i3x}(z' + 3iz)$$

$$y'' = z''e^{i3x} + 3iz'e^{i3x} + 3iz'e^{i3x} + (3i)^2ze^{i3x} =$$
$$= e^{i3x}(z'' + 6iz' - 9z)$$

Insättning ger

$$\cancel{e^{i3x}}\Big((z'' + 6iz' - 9z) + 9z\Big) = \cancel{e^{i3x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad z'' + 6iz' = 1 \qquad \text{(Fall I)}$$

Ansätt $z = Ax$. Detta ger $z' = A$, $z'' = 0$, och vi får

$$0 + 6iA = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{6i} = -\frac{i}{6}.$$

Vi får $z = -\frac{i}{6}x$ och $y = -\frac{i}{6}xe^{i3x}$.

Detta är lösningen till <u>hjälpekvationen</u>.

$$y_0 = -\frac{i}{6}xe^{i3x} = -\frac{i}{6}x(\cos 3x + i\sin 3x) =$$
$$= \underbrace{\frac{x}{6}\sin 3x}_{\operatorname{Re} y_0} + i\underbrace{\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)}_{\operatorname{Im} y_0}$$

Vad blir då lösningen till $y'' + 9y = \sin 3x$? (8)

<u>OBS!</u>

$$\left(\frac{x}{6}\sin 3x + i\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)\right)'' + 9\left(\frac{x}{6}\sin 3x + i\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)\right) = \cos 3x + i\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{6}\sin 3x\right)'' + i\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)'' + 9\left(\frac{x}{6}\sin 3x\right) + i\cdot 9\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right) = \cos 3x + i\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\frac{x}{6}\sin 3x\right)'' + 9\left(\frac{x}{6}\sin 3x\right)\right) + i\left(\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)'' + 9\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)\right) = \cos 3x + i\sin 3x$$

Alltså följer att

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{6}\sin 3x\right)'' + 9\left(\frac{x}{6}\sin 3x\right) = \cos 3x \\ \left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)'' + 9\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right) = \sin 3x \end{cases}$$

och vi ser att $\operatorname{Im} y_0 = -\frac{x}{6}\cos 3x$ löser vår ekvation!

<u>Svar:</u> $y = -\frac{x}{6}\cos 3x$.

<u>Allmänt:</u> y_0 löser hjälpekvationen $y'' + ay' + by = p(x)e^{i\alpha x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} y_0 \text{ löser } y'' + ay' + by = p(x)\cos \alpha x \\ \operatorname{Im} y_0 \text{ löser } y'' + ay' + by = p(x)\sin \alpha x \end{cases}$$

IV) <u>Linjäritet:</u>

<u>Ex:</u> Hitta en lösning till $y'' + 9y = \sin 3x - x^2$ (*)

<u>Strategi:</u>
- Hitta en lösning y_{p_1} till $y'' + 9y = \sin 3x$
- Hitta en lösning y_{p_2} till $y'' + 9y = -x^2$

Linjäritet ger att $y_{p_1} + y_{p_2}$ är en lösning till (*)

II