Föreläsning 15

(1)

Linjära ekvationer av andra ordningen

Tidigare: Linjära differentialekvationer av första ordningen:

$$y' + g(x)y = h(x).$$

Nu: Linjära diff.ekv. av andra ordningen:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x)$$

Anm: Vi återkommer till namnet "linjär".

Börjar med att lösa specialfallet $h(x)=0$.

Ekvationen $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ kallas homogen.

Lösning av $y''+ay'+by=0$:

Koncentrerar oss på fallet $a(x)=a$, $b(x)=b$, där a och b är konstanter.

Def: Polynomet $p(r) = r^2+ar+b$ kallas för det karakteristiska polynomet till ekvationen

$$y''+ay'+by=0.$$

Ekvationen $p(r)=0$ kallas karakteristiska ekvationen.

(2)

Sats 1: Om r_1, r_2 rötter till den karakteristiska ekvationen $p(r)=0$, så ges lösningarna till

$$y''+ay'+by=0 \quad \text{av}$$

$$\begin{cases} y(x) = C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x} & \text{om } r_1 \neq r_2 \quad (C_1, C_2 \text{ konst.}) \\ y(x) = (C_1x+C_2)e^{r_1x} & \text{om } r_1 = r_2 \end{cases}$$

Bevis: Vi väntar till allra sist i föreläsningen, men kollar det "ena hållet" för fallet $r_1 \neq r_2$ så länge:

Antag $r_1 \neq r_2$. Vi får

$$\begin{cases} y = C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x} \\ y' = r_1C_1e^{r_1x}+r_2C_2e^{r_2x} \\ y'' = r_1^2C_1e^{r_1x}+r_2^2C_2e^{r_2x} \end{cases}$$

Sätter vi in detta i ekvationens vänsterled får vi

$$r_1^2C_1e^{r_1x}+r_2^2C_2e^{r_2x}+a\left(r_1C_1e^{r_1x}+r_2C_2e^{r_2x}\right)+$$

$$+b\left(C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}\right) = C_1e^{r_1x}(\underbrace{r_1^2+ar_1+b}_{=0})+$$

$$+C_2e^{r_2x}(\underbrace{r_2^2+ar_2+b}_{=0}) = 0 \qquad \text{ok!}$$

Har dock inte visat att det ej finns fler lösningar (ännu!)

(3)

Ex: Lös den homogena ekvationen

$$y''+y'-2y=0 \quad !$$

Lösning: Kar. ekv. $p(r)=r^2+r-2=0 \iff \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -2 \end{cases}$

Satsen ovan ger lösn. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$, C_1, C_2 konst.

(OBS! 2 konstanter)

Ex: Lös $y''-4y'+4y=0$!

Lösning: Kar. ekv. $p(r)=r^2-4r+4=0 \iff$

$$(r-2)^2=0 \iff r_{1,2}=2 \quad \text{(dubbelrot)}$$

Vi får lösningarna $y=(C_1x+C_2)e^{2x}$.

Ex: Lös $y''+4y'+5y=0$!

Lösning: Kar. ekv. $p(r)=r^2+4r+5=0 \iff$

$(r+2)^2=-1 \iff r=-2\pm i$. Detta ger lsg.

$$y=C_1e^{(-2+i)x}+C_2e^{(-2-i)x}.$$

Vi skriver om m.h.a. $e^{ix}=\cos x+i\sin x$:

$$y=C_1e^{(-2+i)x}+C_2e^{(-2-i)x}=e^{-2x}\left(C_1e^{ix}+C_2e^{-ix}\right)$$

$$=e^{-2x}\left(C_1(\cos x+i\sin x)+C_2(\cos x-i\sin x)\right)=$$

$$=e^{-2x}\left((C_1+C_2)\cos x+i(C_1-C_2)\sin x\right)=$$

(4)

$$=e^{-2x}(A\cos x+B\sin x) \quad \text{där } \begin{cases} A = C_1+C_2 \\ B = i(C_1-C_2) \end{cases}$$

Sats 2: Om $p(r)=0$ har rötterna $r_{1,2}=a\pm bi$ $(a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0)$ får vi lösningarna

$$y=e^{ax}\left(A\cos(bx)+B\sin(bx)\right)$$

där A, B är konstanter

Ex: Lös $y''+9y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=3$.

Lösning: $p(r)=r^2+9=0 \iff r=\pm 3i$

Satsen ovan ger lösningarna

$$y=e^{0\cdot x}(A\cos 3x+B\sin 3x)=A\cos 3x+B\sin 3x$$

Vi får $y(0)=A\cos 0+B\sin 0=A=2$, och

$$y'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x \implies$$

$$y'(0)=-3A\sin 0+3B\cos 0=3B=3 \iff B=1$$

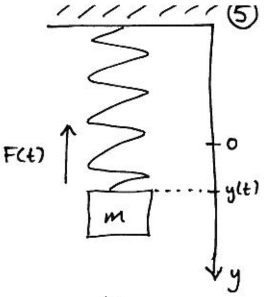
Svar: $y(x)=2\cos 3x+\sin 3x$ (OBS! 2 beg.villkor)

Ex (harmonisk svängning):

Massa $m=1$ kg + fjäder; fjäderkonstant $k=9$ N/m

5

$$F(t) = -k \cdot y(t)$$



Newtons kraftekvation:

$$-k \cdot y(t) = m \cdot a(t)$$

acceleration

$$\Leftrightarrow \quad m \cdot y''(t) = -k \cdot y(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad y''(t) = -\frac{k}{m} y(t) \Leftrightarrow y''(t) + \frac{k}{m} y(t) = 0$$

Med $m=1$, $k=9$, får vi

$$\boxed{y'' + 9y = 0}$$

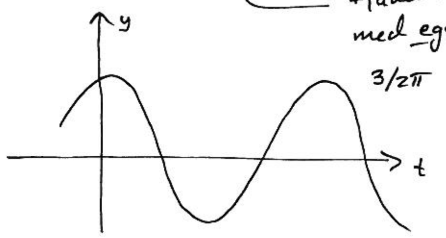
Denna ekv. löste vi ovan och fick

$$y = A\cos 3t + B\sin 3t$$

OBS! Hjälpvinkelmetoden ger att

$$y = \sqrt{A^2+B^2}\, \sin(3t+\delta)$$

Fjädern svänger med egenfrekvens $3/2\pi$



6

Bevis (Sats 1):

Antag att vi vill lösa ekvationen

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (*)$$

Inför ny funktion $z(x)$ via $z(x) = e^{-wx} y(x)$, där w är ett tal (som vi sedan ska välja "smart")

$$z = e^{-wx} y \Leftrightarrow y = z e^{wx}$$

Vi får då

$$\begin{cases} y' = z' e^{wx} + w z e^{wx} = e^{wx}(z' + wz) \\ y'' = z'' e^{wx} + w z' e^{wx} + w z' e^{wx} + w^2 z e^{wx} = \\ \quad = e^{wx}(z'' + 2wz' + w^2 z). \end{cases}$$

Sätt in detta i $(*)$:

$$e^{wx}(z'' + 2wz' + w^2 z) + a e^{wx}(z' + wz) + b z e^{wx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\cancel{e^{wx}}}_{\neq 0}\left(z'' + (2w+a)z' + (w^2 + aw + b)z\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z'' + (2w+a)z' + (w^2 + aw + b)z = 0$$

[Välj nu w som r_1, ett av nollställena till $p(r) = r^2 + ar + b$. Vi får $p(r_1) = p(w) = w^2 + aw + b = 0$]

7

$$\underset{w=r_1}{\Leftrightarrow} \quad z'' + (2r_1 + a)z' = 0 \qquad (*')$$

Linjär av första ordningen med z' som obekant!

$g(x) = 2r_1 + a$, $G(x) = (2r_1 + a)x$, $e^{G(x)} = e^{(2r_1+a)x}$

$$(*') \Leftrightarrow e^{(2r_1+a)x} z'' + e^{(2r_1+a)x} \cdot (2r_1 + a) z' = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{(2r_1+a)x} \cdot z'\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{(2r_1+a)x} \cdot z' = C \Leftrightarrow z' = C e^{-(2r_1+a)x}$$

Antag att $2r_1 + a \neq 0$: Då gäller

$$z = \frac{C}{-(2r_1+a)} e^{-(2r_1+a)x} + C_1$$

Nu hade vi $z = e^{-wx} y = e^{-r_1 x} y$, så

$$e^{-r_1 x} y = \frac{C}{-(2r_1+a)} e^{-(2r_1+a)x} + C_1$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \underbrace{\frac{C}{-(2r_1+a)}}_{=C_2} e^{(r_1 - (2r_1+a))x} + C_1 e^{r_1 x} =$$

$$= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{(-a-r_1)x}$$

8

Observation: $p(r) = r^2 + ar + b$, men samtidigt $p(r) = (r - r_1)(r - r_2) =$
$= r^2 - (r_1 + r_2) r + r_1 r_2$.

Av detta följer att $a = -(r_1 + r_2)$

Vi får nu $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{((r_1+r_2) - r_1)x} =$

$= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ om $2r_1 + a \neq 0$.

Men $2r_1 + a = 2r_1 - (r_1 + r_2) = r_1 - r_2$, så

$2r_1 + a \neq 0 \Leftrightarrow r_1 - r_2 \neq 0 \Leftrightarrow r_1 \neq r_2$.

Fallet $2r_1 + a = 0$: Observera att $2r_1 + a = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2$.

Då har vi $z' = C \Leftrightarrow z = Cx + C_2 =$
$= C_1 x + C_2 \quad (C_1 = C)$

och vi får

$$y e^{-r_1 x} = C_1 x + C_2$$

$$\Leftrightarrow \quad y = (C_1 x + C_2) e^{r_1 x} \qquad \square$$

Nästa föreläsning ska vi lära oss att lösa icke-homogena ekvationer:

$$y'' + ay' + by = h(x).$$