1

Föreläsning 14

Separabla differentialekvationer

Diff. ekvationer av typen

$$\boxed{y'(x)\cdot f(y(x)) = g(x)}$$ kallas separabla.

Exempel är

$$y'(x)\cdot e^{2y(x)} = x, \quad y'(x)\cdot \frac{1}{y(x)} = x^2+2, \ldots\ldots$$

Låt F och G vara primitiva funktioner till f respektive g. Vi får då

$$y'(x)\cdot f(y(x)) = g(x) \overset{\text{kedjeregeln "baklänges"}}{\Longleftrightarrow} \frac{d}{dx}\left(F(y(x))\right) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad F(y(x)) = G(x) + C$$

Ofta kan vi nu lösa ut $y(x)$ som funktion av x.

Ex: Lös diff. ekvationen $y'(x)\cdot e^{2y(x)} = x$! $(*)$

Vi har $f(y) = e^{2y}$ och $g(x) = x$ $\Rightarrow$

$F(y) = \frac{1}{2}e^{2y}$ och $G(x) = \frac{x^2}{2}$. Vi får

$$(*) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{2y(x)}\right) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{2y(x)} = \frac{x^2}{2} + C$$

2

$$\Leftrightarrow e^{2y(x)} = x^2+2C \Leftrightarrow 2y(x) = \ln(x^2+2C)$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+2C) = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+D), \text{ där } D = 2C. \ \square$$

Minnesregel: Skriv $y' = \frac{dy}{dx}$, dvs.

$$y'\cdot e^{2y} = x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}e^{2y} = x \Leftrightarrow e^{2y}dy = x\,dx$$

Sätt integraltecken framför!

$$\int e^{2y}\,dy = \int x\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{2y} = \frac{x^2}{2} + C \quad \text{osv.} \ldots.$$

Anm: Bakterieuppgiften från förel. 13 kan även lösas med den "separabla metoden":

$$y' = k\cdot y \overset{(y\neq 0)}{\Longleftrightarrow} y'\cdot\frac{1}{y} = k \Leftrightarrow \int\frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = kt + C \Leftrightarrow |y| = e^{kt+C} \Leftrightarrow$$

$$y = \pm e^{kt+C} = \pm e^C\cdot e^{kt} = De^{kt} \qquad (D = \pm e^C)$$

(OBS! Även $y=0$ är en lösning.)

Ex: En varm soppa kyls ner från 90°C till 60°C efter 10 min. i ett rum med temperatur 20°C. Nedkylningen kan beskrivas med Newtons avsvalningslag, som säger att avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturskillnaden mellan objektet och omgivningen.

3

Ytterligare hur lång tid tar det för soppan att svalna till 35°C ?

Lösning: $y(t)$ = soppans temp. i °C vid tid t min.

Newtons avsvalningslag: $\boxed{y'(t) = -k\,(y(t)-20)}$

↑ separabel

$$\frac{y'}{y-20} = -k \qquad (y \neq 20)$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{1}{y-20}\,dy = \int -k\,dt$$

$$\Leftrightarrow \ln|y-20| = -kt + C \Leftrightarrow |y-20| = e^{-kt+C}$$

$$\Leftrightarrow y - 20 = \pm e^{-kt+C} \Leftrightarrow y = 20 + De^{-kt}$$

$$(D = \pm e^C)$$

$t=0$: $\quad y(0) = 20 + D = 90 \Leftrightarrow D = 70$

vilket ger $y = 20 + 70e^{-kt}$

$t=10$: $\quad y(10) = 20 + 70e^{-10k} = 60$

$$\Leftrightarrow e^{-10k} = \frac{4}{7} \Leftrightarrow -10k = \ln\frac{4}{7}$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{10}\ln\frac{4}{7} = \frac{1}{10}\ln\frac{7}{4}$$

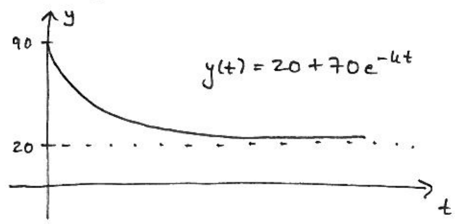
4

$y(t) = 35$: $\quad y(t) = 20 + 70e^{-\frac{t}{10}\ln\frac{7}{4}} = 35$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{10}\ln\frac{7}{4}} = \frac{15}{70} \Leftrightarrow -\frac{t}{10}\ln\frac{7}{4} = \ln\frac{3}{14}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\frac{3}{14}}{-\frac{1}{10}\ln\frac{7}{4}} = \frac{10\ln\frac{14}{3}}{\ln\frac{7}{4}} \approx 27.5 \text{ min}$$

Svar: Ytterligare ca 17.5 min.



Anm: Kan även lösas med integrerande faktor.

Integralekvationer:

Analysens huvudsats: $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$

Ex: Bestäm alla kontinuerliga funktioner $y(x)$ som uppfyller $y(x) = 5 + \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,y(t)\,dt$.

Ledvis derivering: $y'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,y(t)\,dt\right)$

$$\Leftrightarrow y'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,y(x) \qquad \text{Differentialekvation!}$$

Kan lösas på två sätt: (5)

I) $y' = \frac{1}{1+x^2}\, y \iff y' - \frac{1}{1+x^2}\, y = 0$ (*)

$g(x) = -\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow G(x) = -\arctan x \Rightarrow e^{G(x)} = e^{-\arctan x}$

(*) $\iff e^{-\arctan x}\, y' - e^{-\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\, y = 0$

$\iff \frac{d}{dx}\left(e^{-\arctan x} \cdot y\right) = 0 \iff e^{-\arctan x} \cdot y = C$

$\iff y = C e^{\arctan x}$

II) $y' = \frac{1}{1+x^2}\, y \iff y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{1+x^2}$ $(y \neq 0)$

Detta ger $\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{1}{1+x^2}\, dx$

$\iff \ln|y| = \arctan x + C \iff |y| = e^{\arctan x + C}$

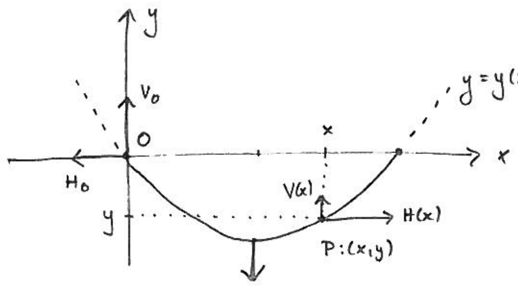
$\iff y = D e^{\arctan x}$ ($D = \pm e^C$, även $D = 0$ tillåtet)

Vi bestämmer konstanten!

$$y(0) = 5 + \underbrace{\int_0^0 \frac{1}{1+t^2}\, y(t)\, dt}_{=0} = 5$$

och $y(0) = C e^{\arctan 0} = C e^0 = C = 5$ Svar: $y(x) = 5e^{\arctan x}$

Ex (hängande snöre): (lite svårare!) (6)



Snöret OP är i mekanisk jämvikt!

Tyngdkraft: $m \cdot g = \rho \cdot s(x) \cdot g$ (ρ massa/l.e.)

där $s(x)$ är snöret OP:s längd.

Antag att [redacted] snöret följer kurvan $y = y(x)$.

Kurvlängd $s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2}\, dt$

Eftersom OP i mekanisk jämvikt gäller:

$$\begin{cases} -H_0 + H(x) = 0 & (1) \\ V_0 + V(x) - \rho g s(x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Kraften i P har tangentens riktning!

Detta ger att $y'(x) = \frac{V(x)}{H(x)}$.

(1) ger att $H(x) = H_0$, och (7)

(2) ger att $V(x) = \rho g s(x) - V_0$.

Vi får $y'(x) = \frac{V(x)}{H(x)} = \frac{\rho g s(x) - V_0}{H_0} = \frac{\rho g}{H_0} s(x) - \frac{V_0}{H_0}$.

Vi får en integralekvation:

$$\boxed{y'(x) = -\frac{V_0}{H_0} + \frac{\rho g}{H_0} \int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2}\, dt}$$

Vi kallar $\frac{\rho g}{H_0} = a$, $-\frac{V_0}{H_0} = b$ och $y'(x) = u(x)$.

Detta ger $u(x) = b + a \int_0^x \sqrt{1 + u(t)^2}\, dt$

Ledvis derivering: $u'(x) = a\sqrt{1 + u(x)^2}$ separabel!

$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} = a \iff \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\, du = \int a\, dx$

$\iff \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = a(x - c)$ [Vi kallar konstanten för $-ac$!]

Vi löser ut u:

$u + \sqrt{1+u^2} = e^{a(x-c)} \iff \sqrt{1+u^2} = e^{a(x-c)} - u$

$\Rightarrow 1 + \cancel{u^2} = e^{2a(x-c)} + \cancel{u^2} - 2e^{a(x-c)}u$

($\Leftarrow$ OBS!)

(8)

$\iff 2e^{a(x-c)}u = e^{2a(x-c)} - 1$

$\iff u = \frac{e^{a(x-c)} - e^{-a(x-c)}}{2}$. Detta ger

$y' = \frac{e^{a(x-c)} - e^{-a(x-c)}}{2} \iff y = \int \frac{e^{a(x-c)} - e^{-a(x-c)}}{2}\, dx =$

$= \frac{1}{a} \frac{e^{a(x-c)} + e^{-a(x-c)}}{2} + D = \frac{1}{a}\cosh\left(a(x-c)\right) + D$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{a}\cosh\left(a(x-c)\right) + D}$$