Föreläsning 13

(1)

Ex: En bakteriekultur växer med en hastighet som är proportionell mot antalet bakterier i kulturen. Antalet bakterier från början var $2\cdot 10^5$, och 2 timmar senare hade kulturen vuxit till $5\cdot 10^6$ celler. Ange en funktion som beskriver hur antalet bakterier beror av tiden.

Lösning: Vi vill bestämma en funktion

$y(t)$ = antalet bakterier efter tid t timmar.

Tillväxthast. proportionell mot antalet bakterier:

$$\boxed{y'(t) = k\cdot y(t)} \qquad k \text{ konstant}$$

En funktion som uppfyller detta samband är t.ex. $y(t)=e^{kt}$, ty $y'(t)=ke^{kt}=ky(t)$. Vi kan även multiplicera med en konstant C, ty

$$y(t)=Ce^{kt} \Rightarrow y'(t)=kCe^{kt}=ky(t).$$

Antag att den sökta funktionen är $y(t)=Ce^{kt}$.

Om vi sätter starttiden till $t=0$ får vi

$$y(0)=Ce^0=C=2\cdot 10^5 \Rightarrow y(t)=2\cdot 10^5\cdot e^{kt}$$

Anger vi tiden i timmar måste

$$y(2)=2\cdot 10^5\cdot e^{2k}=5\cdot 10^6 \Leftrightarrow e^{2k}=\frac{5\cdot 10^6}{2\cdot 10^5}=25$$ (2)

$$\Leftrightarrow 2k=\ln 25 \Leftrightarrow k=\tfrac12\ln 25=\tfrac12\ln 5^2=\ln 5$$

Svar: En funktion ges av $y(t)=2\cdot 10^5\cdot e^{t\ln 5}=2\cdot 10^5\cdot 5^t$.

– Är detta den enda möjliga funktionen?

- Ekvationen $y'(t)=ky(t)$ är ett exempel på en differentialekvation.

Def (differentialekvation): En differentialekvation (i denna kursen) är en ekvation som innehåller en obekant funktion $y(x)$, dess derivator $y'(x), y''(x), \ldots$ samt uttryck i variabeln x.

Vi vill (oftast) bestämma $y(x)$.

Hur kan vi lösa differentialekvationer?

Enklaste fallet – "integrera" direkt!

Ex: Bestäm alla funktioner $y(x)$ som uppfyller

$$y'(x)=x^2+2 \quad !$$

$y(x)$ är primitiv funktion till högerledet:

$$y(x)=\int (x^2+2)\,dx = \frac{x^3}{3}+2x+C$$

OBS! Oändligt många lösningar $(+C)$

(3)

Ex: Lös $y''(x)=\sin x$.

Vi får $y'(x)=\int \sin x\,dx = -\cos x + C \Leftrightarrow$

$$y(x)=\int(-\cos x + C)\,dx = -\sin x + Cx + D$$

(C, D konstanter)

Ex: Lös $y'(x)\cdot\ln x + y(x)\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2+1}$, $x>0$

Här "råkar" vänsterledet kunna skrivas som en derivata av en produkt:

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)\cdot\ln x\right)=\frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow y(x)\cdot\ln x=\int\frac{1}{x^2+1}\,dx=$$

$$=\arctan x + C \Leftrightarrow y(x)=\frac{\arctan x}{\ln x}+\frac{C}{\ln x}.$$

– Tur? – Nej, egentligen inte. Principen fungerar för alla ekvationer av typen

$$\boxed{y'(x)+g(x)y(x)=h(x)}$$ Linjära ekvationer av första ordningen

Ex: Lös $y'(x)+\sqrt{x}\,y(x)=\sqrt{x}$, $x>0$ (*)

Vi ser att $g(x)=\sqrt{x}$. Gör nu på följande sätt:

– Bestäm en primitiv till $g(x)$: $G(x)=\frac23 x^{3/2}$

– Multiplicera ekv. (*) ledvis med $e^{G(x)}=e^{\frac23 x^{3/2}}$.

(4)

Vi får

$$(*) \Leftrightarrow e^{\frac23 x^{3/2}}y'(x)+e^{\frac23 x^{3/2}}\sqrt{x}\,y(x)=e^{\frac23 x^{3/2}}\cdot\sqrt{x}$$

Vänsterledet är nu derivatan av en produkt!

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{\frac23 x^{3/2}}\cdot y(x)\right)=e^{\frac23 x^{3/2}}\cdot\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac23 x^{3/2}}\cdot y(x)=\int e^{\frac23 x^{3/2}}\cdot\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{inre derivata}}\,dx = e^{\frac23 x^{3/2}}+C$$

Svar: $y(x)=1+Ce^{-\frac23 x^{3/2}}$, $x>0$. □

Faktorn $e^{G(x)}=e^{\frac23 x^{3/2}}$ kallas integrerande faktor. Ovanstående metod fungerar alltid på ekvationer av typen

$$y'(x)+g(x)y(x)=h(x) \qquad (*)$$

Bevis: Låt $G(x)$ vara primitiv till $g(x)$. Multiplicera ekv. (*) ledvis med $e^{G(x)}$ $(\neq 0)$:

$$(*) \Leftrightarrow e^{G(x)}y'(x)+e^{G(x)}g(x)y(x)=e^{G(x)}h(x).$$

Vi ser att VL är derivatan av en produkt:

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{G(x)}y(x)\right)=e^{G(x)}h(x)$$

$$\Leftrightarrow e^{G(x)}y(x)=\int e^{G(x)}h(x)\,dx \Leftrightarrow y(x)=\frac{1}{e^{G(x)}}\int e^{G(x)}h(x)\,dx$$ □

Anm: Ofta utelämnas x i $y(x)$.

Ex: Bestäm den lösning till

$$y' + \frac{1}{x} y = \sin x, \qquad x > 0, \qquad (*)$$

som uppfyller $y(\pi) = 1$.

Lösning: $g(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow G(x) = \ln|x| = \ln x \Rightarrow$

$e^{G(x)} = e^{\ln x} = x$, $\quad (*) \Leftrightarrow xy' + y = x\sin x$

$$\Leftrightarrow (x \cdot y)' = x \sin x \Leftrightarrow x \cdot y = \int x \sin x \, dx =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x \, dx = -x\cos x + \sin x + C$$

$$\Leftrightarrow y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}. \quad \text{(allmän lösning)}$$

$$y(\pi) = 1 \Rightarrow 1 = \underbrace{-\cos\pi}_{=1} + \frac{\overbrace{\sin\pi}^{=0}}{\pi} + \frac{C}{\pi} \Leftrightarrow C = 0$$

Svar: $y = -\cos x + \dfrac{\sin x}{x}$ $\quad\square$

Anm: Problemet ovan, med kravet $y(\pi) = 1$ på lösningen, kallas för ett begynnelsevärdesproblem.

Vi har nu kommit så långt att vi kan lösa det inledande problemet med bakterier "på riktigt":

$$y'(t) = ky(t) \Leftrightarrow y'(t) - ky(t) = 0 \qquad (*)$$

$$g(t) = -k \Rightarrow G(t) = -kt \Rightarrow e^{G(t)} = e^{-kt}$$

$$(*) \Leftrightarrow e^{-kt} y'(t) - e^{-kt} k y(t) = e^{-kt} \cdot 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-kt} \cdot y(t)\right) = 0 \Leftrightarrow e^{-kt} \cdot y(t) = C$$

$\Leftrightarrow y(t) = Ce^{kt}$. Vi ser nu att den lösning vi "gissade" faktiskt var den enda möjliga.

Vi avslutar med ytterligare en tillämpning:

Ex: I början av 1980-talet (innan Montrealprotokollet) var det globala utsläppet av freon (CFC-12) i atmosfären $4.2 \cdot 10^8$ kg/år. Denna avlägsnas med hjälp av fotolys (fotoner) med en hastighet som i varje ögonblick är proportionell mot massan freon i atmosfären. Proportionalitetskonstanten är $k = 0.01$ år^{-1}. År 1980 fanns det $8.5 \cdot 10^9$ kg freon i atmosfären. Hur mycket fanns det (enligt denna modell) 1984?

Lösning: $m(t)$ = massa freon i kg vid tid t år

$$\boxed{m'(t) = 4.2 \cdot 10^8 - 0.01 m(t)}$$

$$\Leftrightarrow \quad m' + 0.01m = 4.2 \cdot 10^8 \qquad (*)$$

$$g(t) = 0.01 \Rightarrow G(t) = 0.01t \Rightarrow e^{G(t)} = e^{0.01t}$$

$$(*) \Leftrightarrow e^{0.01t} m' + e^{0.01t} \cdot 0.01 m = e^{0.01t} \cdot 4.2 \cdot 10^8$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{0.01t} \cdot m\right) = e^{0.01t} \cdot 4.2 \cdot 10^8$$

$$\Leftrightarrow e^{0.01t} \cdot m = \int e^{0.01t} \cdot 4.2 \cdot 10^8 \, dt = \frac{4.2 \cdot 10^8}{0.01} e^{0.01t} + C =$$

$$= 4.2 \cdot 10^{10} e^{0.01t} + C \Leftrightarrow m(t) = 4.2 \cdot 10^{10} + Ce^{-0.01t}$$

1980: Sätt $t = 0$: $m(0) = 4.2 \cdot 10^{10} + Ce^0 = 8.5 \cdot 10^9$

$$\Leftrightarrow C = 8.5 \cdot 10^9 - 4.2 \cdot 10^{10} = -3.35 \cdot 10^{10}$$

Vi får då $m(t) = 4.2 \cdot 10^{10} - 3.35 \cdot 10^{10} e^{-0.01t}$

1984: Sätt $t = 4$: $m(4) = 4.2 \cdot 10^{10} - 3.35 \cdot 10^{10} e^{-0.04} \approx$

$$\approx 9.8 \cdot 10^9 \text{ kg}$$

Svar: ca $9.8 \cdot 10^9$ kg