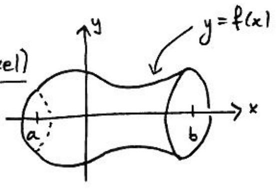
(1)

Föreläsning 11

Volym av rotationskropp (x-axel)

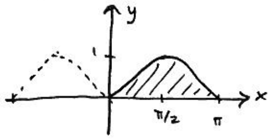


$$\boxed{\text{Volym} = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx}$$

Rotationsvolymer kring y-axeln:

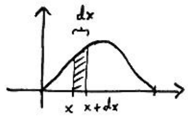
För rotationer kring y-axeln kan man antingen byta roll på x och y (dvs. först bestämma inversen) och göra som ovan, eller använda sig av "rörformeln".

Ex: Låt området mellan x-axeln och $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$, rotera kring y-axeln. Bestäm volymen.



Vi får $dV \approx 2\pi x \cdot dx \cdot y$

$= \underbrace{2\pi x}_{\text{rörets omkrets}} \cdot \sin x \cdot dx$ då dx litet

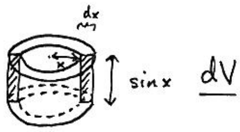


$$\text{Volym} = \int_0^{\pi} dV =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x\,dx = 2\pi\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi} +$$

$$+ 2\pi \int_0^{\pi} \cos x\,dx = 2\pi^2 + 2\pi\Big[\sin x\Big]_0^{\pi} =$$

$$= \underline{\underline{2\pi^2}} \text{ v.e.}$$



(2)

Massa:

För beräkning av massa gäller sambandet

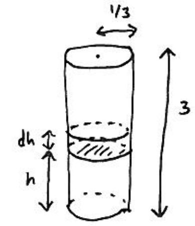
$$\boxed{m = \rho \cdot V}$$

där m är massa (kg), ρ är densitet (kg/m³) och V är volym (m³). Observera dock att detta förutsätter att ρ är konstant!

– Vad händer då ρ varierar?

Ex: En cylindrisk behållare med radien 1/3 m och höjden 3 m är fylld med ett material. Densiteten varierar via sambandet

$$\rho(h) = 400 - 100h \quad (\text{kg/m}^3)$$



För en tunn skiva gäller

$$dV = \pi(1/3)^2 \cdot dh = \frac{\pi}{9}\,dh$$

$$\Rightarrow \quad dm = \rho(h) \cdot dV = (400 - 100h) \cdot \frac{\pi}{9}\,dh$$

eftersom $\rho(h)$ kan betraktas som konstant i den tunna skivan. Vi får

$$m = \int_0^3 dm = \frac{\pi}{9}\int_0^3 (400 - 100h)\,dh = \frac{\pi}{9}\Big[400h - 50h^2\Big]_0^3 =$$

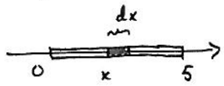
(3)

$$= \frac{\pi}{9}(1200 - 450) = \frac{250}{3}\pi \text{ kg} \qquad \square$$

Massa av en tråd / en plan skiva

Samma resonemang som ovan, men vi använder längddensitet (kg/m) respektive areadensitet (kg/m²).

Ex: En 5 m lång tråd placeras på tallinjen (mellan 0 och 5).



Densiteten (i kg/m) ges av

$$\rho(x) = 2 + \frac{1}{x+1}. \quad \text{Bestäm massan!}$$

En liten trådbit vid x har massan

$$dm = \rho(x) \cdot dx = \left(2 + \frac{1}{x+1}\right)dx.$$

Totalmassan blir då

$$m = \int_0^5 dm = \int_0^5 \left(2 + \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \Big[2x + \ln|x+1|\Big]_0^5 = 10 + \ln 6 \text{ kg} \qquad \square$$

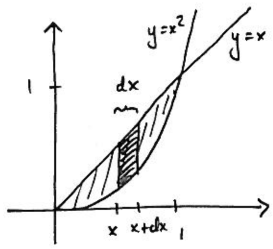
(4)

Ex: En plan skiva ges av $x^2 \le y \le x$, $0 \le x \le 1$.

Areadensiteten ges av

$$\rho(x) = x + 1 \quad (\text{kg/m}^2)$$

OBS! Densiteten beror här bara på x! Bestäm massan!



Vi får m

$$dm = \rho(x) \cdot dA \approx$$

$$\approx (x+1) \cdot (x - x^2) \cdot dx$$

$$= (x - x^3)\,dx$$

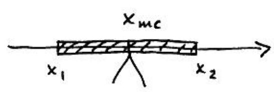
och totalmassan ges av

$$m = \int_0^1 dm = \int_0^1 (x - x^3)\,dx = \Big[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\Big]_0^1 = \frac{1}{4} \text{ kg} \qquad \square$$

Masscentrum (tyngdpunkt):

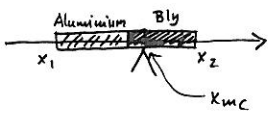
Vad menas med masscentrum?

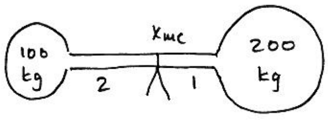
Homogen stav:



$$x_{mc} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

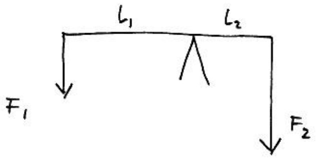
Blandad stav:





Placerar vi en vridningsaxel i x_{mc} så ska systemet vara i jämvikt!

Fysikaliskt: Jämvikt då vridningsmomenten lika stora åt bägge håll.

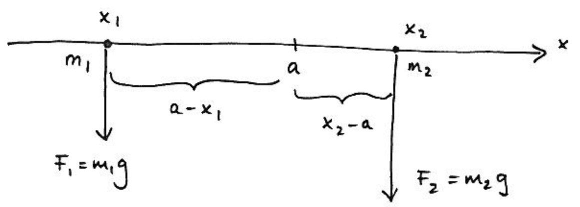


$$\boxed{F_1 \cdot L_1 = F_2 \cdot L_2}$$

Anm: Hävstångsprincipen

- Låt oss först studera en "stav" med två masspunkter:

Ex: Låt m_1 och m_2 vara punktformiga massor placerade i x_1 och x_2, och låt a vara en punkt mellan x_1 och x_2:



Jämvikt kring a då $m_1 \cancel{g}(a-x_1) = m_2 \cancel{g}(x_2-a)$

$$\Longleftrightarrow \quad m_1(x_1-a) + m_2(x_2-a) = 0$$

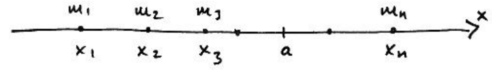
Förenkling ger $(m_1+m_2)a = m_1x_1 + m_2x_2$

$$\Longleftrightarrow \quad a = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{a = \frac{1}{M}(m_1x_1+m_2x_2)}$$

där $M = m_1 + m_2$

- Vad händer om vi har n st punktformiga massor?

Ex: Massor $m_1, m_2, \ldots, m_n$



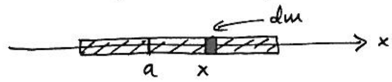
Jämvikt får vi då

$$m_1(x_1-a) + m_2(x_2-a) + \ldots + m_n(x_n-a) = 0$$

Omskrivning ger $a = \dfrac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$,

dvs. $\boxed{a = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}$ där $M = m_1+m_2+\cdots+m_n$

- Vi provar nu med en stav K (med oändligt många punktformiga massor dm)



Jämvikt då $\int_K dm(x-a) = 0$. Omskrivning ger

$$\int_K dm(x-a) = \int_K x\,dm - a\int_K dm = \int_K x\,dm - aM = 0$$

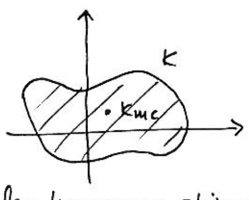
$$\boxed{a = \frac{1}{M}\int_K x\,dm} \qquad M = \text{stavens totalmassa}$$

Def (Masscentrum):

$(a=)\ x_{mc} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_K x\,dm$ kallas masscentrum (tyngdpunkt) av kroppen K m.a.p. x-led.

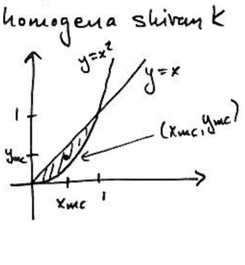
- För två- och tredimensionella kroppar räknar vi ut masscentrum genom att beräkna masscentrum med avseende på varje led:

T.ex. $K_{mc} = (x_{mc}, y_{mc})$



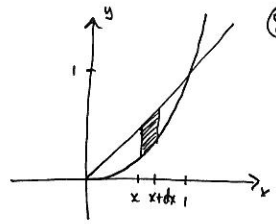
Ex: Beräkna masscentrum för den homogena skivan K som ges av $x^2 \le y \le x$, $0 \le x \le 1$.

Lösning: K homogen $\Rightarrow$ ρ konstant så $M = \rho \cdot A = \rho\int_0^1 (x-x^2)\,dx = \ldots = \dfrac{\rho}{6}$

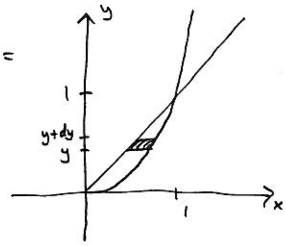


x-led: $dm = \rho(x-x^2)\,dx = 6M(x-x^2)\,dx$

$$\Rightarrow \quad x_{mc} = \frac{1}{M}\int_K x\,dm = \frac{1}{\cancel{M}}\int_0^1 x\,6\cancel{M}(x-x^2)\,dx = 6\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = 6\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$



y-led: $dm = \rho(\sqrt{y}-y)\,dy = 6M(\sqrt{y}-y)\,dy$



$$\Rightarrow \quad y_{mc} = \frac{1}{M}\int_K y\,dm = \frac{1}{\cancel{M}}\int_0^1 y\,6\cancel{M}(\sqrt{y}-y)\,dy = 6\int_0^1 (y^{3/2}-y^2)\,dy = 6\left[\frac{2}{5}y^{5/2} - \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

Svar: $K_{mc} = (x_{mc}, y_{mc}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$