1

Föreläsning 10:

Integraler och summor:

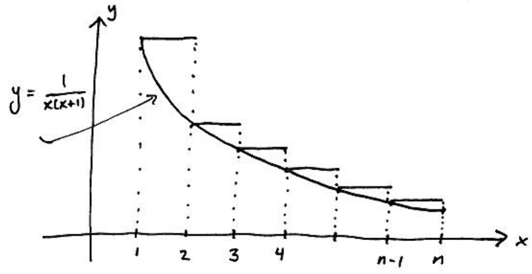
Koppling integral $\longleftrightarrow$ summa
("lätt" att beräkna) ("svår" att beräkna)

Ex: Hur kan man uppskatta värdet av summan

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \; ?$$

– Jo, med hjälp av en integral.

Betrakta funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$, $1 \le x \le n$.



Arean under trappfunktionen i figuren är

$$f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + \dots + f(n-1)\cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$$

och denna area är större än arean under grafen till $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$, dvs.

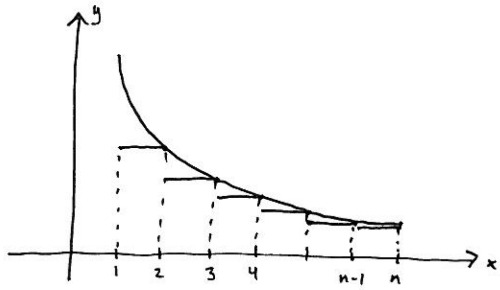
2

$$\int_1^n \frac{1}{x(x+1)}\,dx \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Av detta följer att

$$\frac{1}{n(n+1)} + \int_1^n \frac{1}{x(x+1)}\,dx \le \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Omvänt, om vi bildar trappfunktionen



så är arean under denna $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, och vi ser att

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \le \int_1^n \frac{1}{x(x+1)}\,dx.$$

Detta ger

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \le \frac{1}{1\cdot 2} + \int_1^n \frac{1}{x(x+1)}\,dx.$$

Vi har nu visat att

$$\boxed{\frac{1}{n(n+1)} + \int_1^n \frac{1}{x(x+1)}\,dx \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \le \frac{1}{1\cdot 2} + \int_1^n \frac{1}{x(x+1)}\,dx}$$

3

Vi beräknar integralen:

$$\int_1^n \frac{1}{x(x+1)}\,dx \underset{\text{p.bråkuppd.}}{=} \int_1^n \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \Big[\ln|x| - \ln|x+1|\Big]_1^n =$$

$$= \ln n - \ln(n+1) - \underbrace{\ln 1}_{0} + \ln 2 = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln 2.$$

Detta ger

$$\frac{1}{n(n+1)} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln 2 \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \le \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln 2.$$

Anm: Uppskattningen uppåt kan nu t.ex. användas för att visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ är konvergent.

Eftersom $\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln 2 \to \frac{1}{2} + \overset{=0}{\ln 1} + \ln 2$, $n \to \infty$

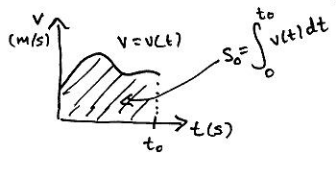
är följden $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ uppåt begränsad. Tillsammans med det faktum att den är växande följer det att serien är konvergent och att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \le \frac{1}{2} + \ln 2$.

(Jämför även Cauchy's integralkriterium. Läs själva i boken!)

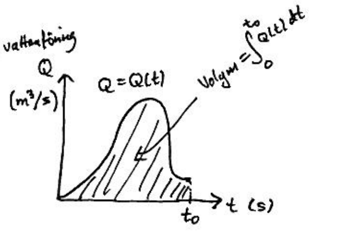
Användning av integralen

Fysikaliska exempel:

I)



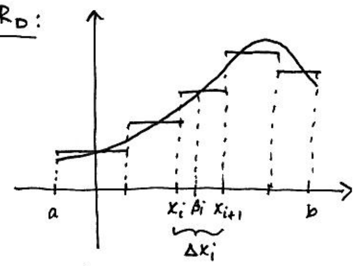
II) vattenflöde



4

Allmän princip för tillämpning av integraler:

Riemannsumma R_D:

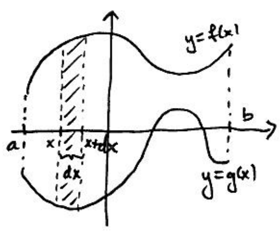


$$R_D = \sum_{i=0}^{n} f(\beta_i)\,\Delta x_i \to \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{då "}D \to 0\text{"}.$$

Integral ≈ "oändlig summa" av "oändligt små delar" uttryckta i dx

Plan area:

Bestäm arean mellan $f(x)$ och $g(x)$ $(f(x) \ge g(x))$.

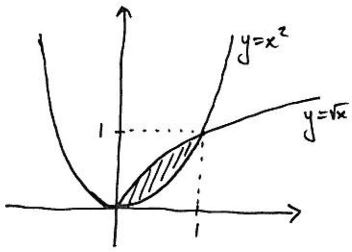


Då dx är litet är den skuggade arean $\approx (f(x) - g(x))\,dx$

$$\boxed{\text{Area} = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}$$

Ex: Bestäm arean av det område i xy-planet som begränsas av $y=\sqrt{x}$ och $y=x^2$. (5)

Kurvorna skär varandra då $x=0$ och $x=1$, och $\sqrt{x} \geq x^2$ för $0 \leq x \leq 1$.

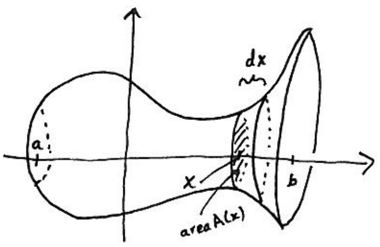


$$\text{Area} = \int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ a.e.}$$

OBS! Areor är alltid positiva!

Volym: Betrakta följande figur:



Vid punkten x, skär ut en tunn skiva av tjocklek dx. Då gäller

$$dV \approx A(x)\cdot dx \quad \text{om } dx \text{ litet}$$

volymen av den tunna skivan

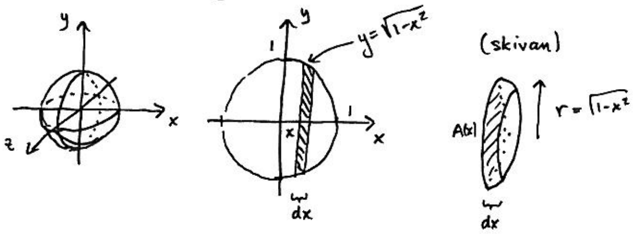
Med andra ord, vi approximerar skivan med en cylinder.

Summerar vi volymen av alla sådana tunna skivor får vi (6)

$$\boxed{\text{Volym} = \int_a^b dV = \int_a^b A(x)\,dx}$$

Formeln kallas skivformeln.

Ex: Beräkna volymen av enhetsklotet (radie = 1)



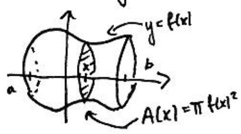
$$dV \approx A(x)\,dx = \pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \pi(1-x^2)\,dx$$

då dx är litet. Vi får

$$\text{Volym} = \int_{-1}^1 dV = \int_{-1}^1 \pi(1-x^2)\,dx = \pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{4\pi}{3} \text{ v.e}$$

Rotationsvolymer:

Låt kurvan $y=f(x)$, $a\leq x\leq b$, rotera kring x-axeln:



Skivformeln ger

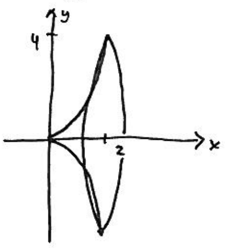
$$\boxed{\text{Volym} = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx}$$

Ex: Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då $y=f(x)=x^2$, $0\leq x\leq 2$, roterar kring x-axeln. (7)

$$\text{Volym} = \pi\int_0^2 (x^2)^2\,dx =$$

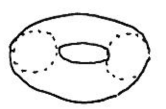
$$= \pi\int_0^2 x^4\,dx = \pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2 =$$

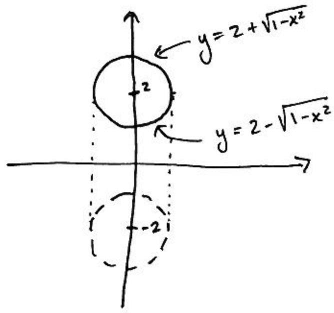
$$= \frac{32}{5}\pi \text{ v.e.}$$



Ex: Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då cirkeln $x^2+(y-2)^2=1$ roterar kring x-axeln.

Rotationskroppen blir en torus (badring)





$$x^2+(y-2)^2=1 \iff$$

$$y = 2 \pm \sqrt{1-x^2} \qquad \text{OBS! } y \text{ ej funktion av } x.$$

$$\text{Volym} = V_1 - V_2 \quad \text{där} \begin{cases} V_1 = \text{volym då } y=2+\sqrt{1-x^2} \text{ roterar} \\ V_2 = \quad \text{—''—} \quad y=2-\sqrt{1-x^2} \text{ roterar.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Volym} = \pi\int_{-1}^1 (2+\sqrt{1-x^2})^2\,dx - \pi\int_{-1}^1 (2-\sqrt{1-x^2})^2\,dx = \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{förenkling}} =$$

(8)

$$\ldots\ldots = 8\pi\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\begin{matrix} x=\sin t\,, & dx=\cos t\,dt \\ x=1 \Rightarrow t=\pi/2 & \\ x=-1 \Rightarrow t=-\pi/2 & \end{matrix}\right] =$$

$$= 8\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = 8\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt =$$

$$= 8\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = 8\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = 8\pi\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

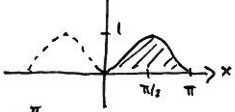
$\cos t \geq 0$ $\qquad$ $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$

$$= 8\pi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin(-\pi)\right) = 4\pi^2 \text{ v.e.}$$

Rotationsvolymer kring y-axeln:

För rotationer kring y-axeln kan man antingen byta roll på x och y (dvs. först bestämma inversen) och göra som ovan, eller använda sig av "rörformeln".

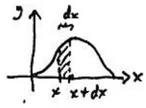
Ex: Låt området mellan x-axeln och $y=\sin x$, $0\leq x\leq\pi$ rotera kring y-axeln. Bestäm volymen.



Vi får $dV \approx 2\pi x\cdot dx\cdot y =$

$= \underbrace{2\pi x}_{\text{rörets omkrets}}\cdot\sin x\cdot dx$ då dx litet

$$\text{Volym} = \int_0^\pi dV = 2\pi\int_0^\pi x\sin x\,dx = 2\pi\left[-x\cos x\right]_0^\pi +$$



$$+ 2\pi\int_0^\pi \cos x\,dx = 2\pi^2 + 2\pi\left[\sin x\right]_0^\pi =$$

$$= 2\pi^2 \text{ v.e}$$