

Instuderingsfrågor för Endimensionell analys – kurs B1 (V, W)

Anvisningar

Avsikten med följande frågor är att hjälpa dig med självkontroll av dina kunskaper. Om du känner dig osäker på svaren bör du slå upp motsvarande avsnitt i läroboken och läsa på ytterligare en gång. Många frågor börjar med orden “Vad menas med att”. Denna fras betyder precis detsamma som frasen “Ge definitionen av att”. Kontrollera gärna med övningsledare och föreläsare om dina svar på frågorna kan anses vara tillfredsställande.

Kapitel 1

1. Vilka talmängder betecknas med $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{R}$?
2. Vad betyder tecknen $\in$, $\Rightarrow$ respektive $\Longleftrightarrow$?
3. Varför kan inte symbolerna $\Rightarrow$ och $\Longleftrightarrow$ användas mellan två uttryck?
4. Vad är det för skillnad mellan ett axiom, en definition och en sats?

Kapitel 2

5. Hur adderas, multipliceras och divideras bråk?
6. Vad menas med kvadratkomplettering? Kan alla andragradspolynom, t.ex. även x^2 , kvadratkompletteras?
7. Skriv upp formeln för polynomdivision, $\frac{f(x)}{g(x)} = \dots$, och använd denna för att bevisa faktorsatsen för polynom.

Kapitel P

8. Vad menas med parallella linjer i planet?
9. Formulera ett axiom som handlar om linjer och vinklar.
10. Vad menas med kongruenta trianglar? Formulera kongruensaxiomen.
11. Vad är vinkelsumman i en triangel respektive fyrhörning. Ge bevis.
12. Formulera och bevisa yttervinkelsatsen.
13. Definiera följande: parallelogram, romb, parallelltrapets, rektangel och kvadrat.
14. Visa att en rektangel är en parallelogram.
15. Visa att en romb är en parallelogram.
16. Formulera och bevisa parallelogramsatsen.
17. Visa att diagonalerna i en parallelogram delar varandra mitt itu.

18. Formulera och bevisa satsen om en likbent triangel samt basvinkelsatsen.
19. Vad menas med en sluten polygon och hur kan man beräkna arean av området innanför en sådan?
20. Bevisa formler för triangelns, parallelogrammens samt parallelltrapetsets area.
21. Formulera och bevisa Pythagoras sats.
22. Formulera och bevisa omvändningen till Pythagoras sats. (Det finns ytterligare ett bevis bland övningarna. Välj själv det du tycker är enklast.)
23. Formulera transversalsatsen.
24. Vad menas med att två trianglar är likformiga?
25. Formulera topptriangelsatsen.
26. Formulera bisektrissatsen.
27. Formulera alla likformighetsfallen.
28. Definiera begreppet cirkel.
29. Formulera randvinkelsatsen samt två omedelbara följder av denna.
30. Definiera en tangent till en cirkel och ange en viktig egenskap hos denna.

Kapitel 3

31. Vad är skillnaden mellan en ekvation och ett uttryck? Ge exempel.
32. Vad menas med att två ekvationer är ekvivalenta?
33. Vad kan man göra med en ekvation, om man vill få en ny ekvivalent ekvation? Ge tre exempel på operationer där en ny ekvation uppstår, som inte säkert är ekvivalent med den ursprungliga.
34. Härled lösningsformeln för andragradsekvationen $x^2 + px + q = 0$.
35. Hur angriper du olikheter som innehåller polynom och kvoter av polynom?

Kapitel 4

36. Vad karakteriserar en aritmetisk summa? Hur beräknar man en sådan?
37. Skriv upp och härled formeln för en geometrisk summa.
38. Definiera $n!$ samt $\binom{n}{k}$. Vad är $\binom{n}{0}$ och $\binom{n}{1}$?
39. Skriv $(a + b)^5$ som en summa. Skriv upp den allmänna binomialsatsen.
40. Skriv upp Pascals triangel till och med $n = 6$.

41. Vad karakteriserar en geometrisk talföljd?

Kapitel 5

42. Definiera begreppet riktningskoefficient för en linje i planet. Vilka värden kan den anta?
43. Hur får man fram en ekvation för en rät linje a) om man känner riktningskoefficienten och en punkt på linjen; b) om man känner två punkter på linjen?
44. Ange en ekvation för en parabel med symmetrilinje parallell med x -axeln och vertex i (x_0, y_0) , som ligger a) till höger och b) till vänster om linjen $x = x_0$ i xy -planet.
45. Definiera vad som menas med "absolutbeloppet av ett reellt tal".
46. Skriv upp formler för avståndet mellan två punkter dels på tallinjen, dels i planet.
47. Härled cirkelns ekvation.
48. Skriv upp en ekvation för en ellips med halvaxlarna a och b och medelpunkten (x_0, y_0) samt rita en figur.
49. Ange en ekvation för en hyperbel samt dess asymptoter. Rita hyperbeln och asymptoterna i en figur och sätt ut skärningarna med koordinataxlarna. Vad händer om x och y byter plats i ekvationen? (Se även geometrihäftet Kap A.7.)
50. Ange asymptoterna till hyperbeln $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. (Se även geometrihäftet Kap A.7.)

Kapitel 7

51. Beskriv vad som menas med en funktion samt funktionens definitionsmängd och värdemängd.
52. Låt f vara en funktion vars definitionsmängd och värdemängd är delmängder av $\mathbf{R}$. Vad menas med grafen av f ?
53. Vad menas med inversen f^{-1} till en funktion f ? Har alla funktioner en invers? Ange ett tillräckligt villkor för att det ska finnas en invers.
54. Definiera begreppen växande och strängt växande funktion.
55. Ge exempel på en funktion i intervallet $1 \leq x < \infty$ som är både strängt växande och uppåt begränsad.
56. Definiera begreppen jämn respektive udda funktion.
57. Ge tre exempel på en jämn funktion och tre exempel på en udda funktion.

Kapitel 8

58. Rita graferna till $f(x) = e^{\alpha x}$ och $f(x) = x^{\alpha}$ för några olika α . Rita graferna till $f(x) = \ln x$ och $f(x) = \ln |x|$.
59. Bevisa logaritmlagarna med utgångspunkt från potenslagarna.

60. Kontrollera att Du kan de olika lagarna för potenser och logaritmer genom att skriva om

$$\begin{aligned} a^\alpha a^\beta &= \quad , & (a^\alpha)^\beta &= \quad , & a^\alpha b^\alpha &= \quad , \\ {}^a \log st &= \quad , & {}^a \log \frac{s}{t} &= \quad , & {}^a \log s^t &= \quad . \end{aligned}$$

61. Uttryck ${}^a \log x$ med hjälp av $\ln x$.

62. Hur definieras vinkelmåttet radian?

63. Definiera de trigonometriska funktionerna, dels i specialfallet av en rätvinklig triangel, dels generellt via enhetscirkeln.

64. Rita graferna till $f(x) = \sin x$, $\cos x$, $\tan x$ och $\cot x$.

65. Härled dubbelolikheten $\sin x < x < \tan x$ då $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

66. Visa trigonometriska ettan.

67. Använd enhetscirkeln och kongruenta trianglar för att visa formler för $\sin(-\alpha)$, $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, $\sin(\pi - \alpha)$ samt motsvarande formler för cosinus.

68. Skriv upp de trigonometriska additionsformlerna. Ange formler för dubbla vinkeln för sinus respektive cosinus. Ge bevis.

69. Redogör för hjälpvinkelmetoden vid behandling av uttryck av formen $a \sin \omega x + b \cos \omega x$.

70. Definiera funktionerna $\arcsin x$, $\arccos x$ respektive $\arctan x$. Ange deras definitions- och värdemängder.

71. Rita graferna till $f(x) = \arcsin x$, $\arccos x$ och $\arctan x$.

Kapitel T.3 – T.4

72. Formulera areasatsen.

73. Formulera sinussatsen.

74. Formulera cosinussatsen.

75. Givet radien i en cirkel, skriv upp formler för dess omkrets respektive area.

76. Ange sambandet mellan båglängd, vinkel och radie för en cirkelsektor, dels då vinkeln mäts i grader, dels i radianer.

77. Givet radien och båglängden för en cirkelsektor, ange dess area.

Kapitel 9

78. Låt $\alpha > 0$ och $a > 1$. Arrangera funktionerna x^α , $\ln x$ och a^x i storleksordning för stora värden på x . Preciserat svaret i form av gränsvärden då $x \rightarrow \infty$.

79. Definiera talet e .

80. Definiera innebörden av uttrycket ”funktionen f är kontinuerlig i punkten a ”.

81. Ange några egenskaper hos kontinuerliga funktioner på slutna, begränsade intervall.
82. Lär dig standardgränsvärdena nummer (9.19) till (9.25) i läroboken. Utgående från de två gränsvärdena

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e \quad \text{då} \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad \text{och} \quad \frac{a^x}{x^\alpha} \rightarrow \infty \quad \text{då} \quad x \rightarrow \infty$$

lär dig härleda (9.20), (9.23), (9.24) och (9.25).

83. Uttryck av formen $f(x)^{g(x)}$ kan skrivas om med hjälp av funktionerna $\exp$ och $\ln$. Hur då?
84. Vad menas med att "serien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ är konvergent"?
85. Låt $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ vara en konvergent serie. Vad menas med seriens summa?
86. Visa att den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ är konvergent precis då $|x| < 1$ och ange dess summa.

Kapitel 10

87. Formulera definitionen av att funktionen f är deriverbar i punkten a .
88. Definiera beteckningen $f'(a)$.
89. Visa att om f är deriverbar i a så är f kontinuerlig i a . Ge exempel på att omvändningen inte gäller.
90. Rita en funktion som i $x = 0$ är
a) diskontinuerlig, b) kontinuerlig men ej deriverbar, c) deriverbar.
91. Härled derivatan av e^x genom att utgå från derivatans definition.
92. Ange en fysikalisk tolkning av uttrycket $f'(x_0)$.
93. Vad menas med tangenten till en funktionskurva $y = f(x)$ i en punkt $(a, f(a))$ på grafen? Svara såväl med ord som i form av en ekvation.
94. Hur får man fram en ekvation för en normal till en kurva i en given punkt på kurvan?
95. Ange formler för derivatan av a) $f(g(x))$, b) $f^{-1}(x)$ c) $f(x)g(x)$, d) $f(x)/g(x)$. Bevisa c) och d).
96. Härled derivatan av $\ln x$, $x > 0$, genom att utgå från derivatan av e^x . Härled sedan derivatan av $\ln |x|$, $x \neq 0$.
97. Skriv upp derivatorna av alla standardfunktionerna (10.9)–(10.20) i läroboken.
98. Härled derivatan av $\sin x$ genom att utgå från derivatans definition.
(Gränsvärde som får användas: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$.)
99. Härled derivatorna av $\arcsin x$ och $\arctan x$.
100. Definiera innebörden i uttrycket " f har lokalt minimum i punkten a ".
101. Vad menas med en lokal extrempunkt respektive en stationär punkt till en funktion?

102. Hur hittar man eventuella lokala extrempunkter till en deriverbar funktion?
103. Formulera medelvärdessatsen och förklara dess innehåll med en figur.
104. Bevisa, med hjälp av medelvärdessatsen, att om en funktion definierad på ett intervall har en derivata som är positiv så är funktionen strängt växande.
105. Bevisa, med hjälp av medelvärdessatsen, att om en funktion definierad på ett intervall har en derivata som är noll så är funktionen konstant.
106. Vad menas med att en rät linje $y = ax + b$ är en (sned) asymptot till en funktionskurva $y = f(x)$, då $x \rightarrow \infty$?
107. Hur bestämmer man eventuella asymptoter till en rationell funktion?
108. Hur löser man ett optimeringsproblem för en deriverbar funktion $f(x)$, $x \in I$, där I är ett intervall? Ange ett villkor som garanterar att ett största och ett minsta värde finns.
109. Ange en metod för att visa en olikhet av formen $f(x) > g(x)$, $x \in I$, där I är ett intervall (f och g är deriverbara).