Föreläsning 20:

Tillämpningar av grafritning:

- Optimering (största/minsta värde)
- Antal rötter till ekvationer
- Visa olikheter

Samtliga problem ovan löses genom att skissera grafen till en funktion!

Optimering:

Ex: Bestäm största resp. minsta värde till

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 25, \quad -3 \le x \le 1.$$

Lösning: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 40x = 4x(x^2 - 3x - 10)$

$$= 4x(x+2)(x-5)$$

Nollställen $x = 0, -2, 5$ ($x = 5$ utanför intervallet)

Teckenstudium där vi även tar med ändpunkterna $x = -3, 1$:

	-3		-2		0		1
x	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	34	$\searrow$	-7	$\nearrow$	25	$\searrow$	2

$f_{max} = 34$

$f_{min} = -7$

Ex: Bestäm största resp. minsta värde till

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 25, \quad x \in \mathbb{R}$$

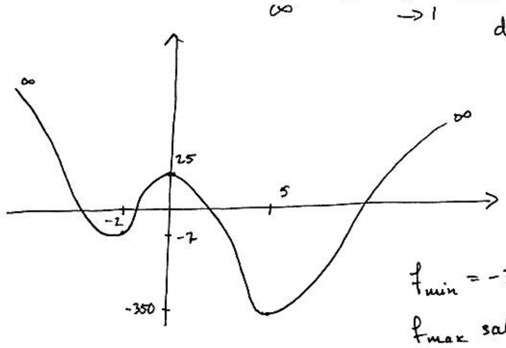
Lösning: Enligt ovan gäller $f'(x) = 4x(x+2)(x-5)$

Alla nollställen intressanta, dvs. även $x = 5$:

		-2		0		5	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	25	$\searrow$	-350	$\nearrow$

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 25 = \underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{x^4}\underbrace{\left(1 - \frac{4}{x} - \frac{20}{x^2} + \frac{25}{x^4}\right)}_{\to 1} \to \infty$$

då $x \to \pm\infty$

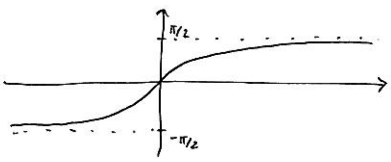


$f_{min} = -350$

f_{max} saknas

Anm: Största/minsta värde behöver ej existera!

Ex: Funktionen $f(x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$, saknar både största och minsta värde!



OBS! Värdet måste alltså antas i intervallet.

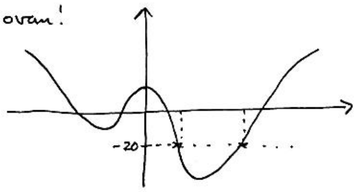
Anm: Första exemplet är lite speciellt, då f är en kontinuerlig funktion på intervallet $-3 \le x \le 1$ (ett slutet, begränsat (kompakt) intervall). Vi har tidigare sett att sådana funktioner alltid har största och minsta värde.

Ekvationer:

Ex: Hur många rötter har ekvationen

$$x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 25 = -20 \quad ?$$

Lösning: Rita grafen till $f(x) = x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 25$. Gjordes ovan!



Svar: 2 st.

Ex: Hur många rötter har ekvationen

$$x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 25 = C \quad ?$$

Lösning: Vi ser efter i grafen:

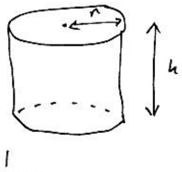
$C < -350$	0 rötter
$C = -350$	1 rot
$-350 < C < -7$	2 rötter
$C = -7$	3 rötter
$-7 < C < 25$	4 rötter
$C = 25$	3 rötter
$C > 25$	2 rötter

Optimering (igen):

Ex: En cylinderformad ölburk med lock som innehåller 0.5 liter ska tillverkas. Vilka mått bör den ha för att plåtåtgången ska bli så liten som möjligt?

Lösning (enhet dm):

$$\boxed{V = \pi r^2 h}$$



Vi får $\pi r^2 h = \frac{1}{2} \iff h = \frac{1}{2\pi r^2}$

$$\boxed{A = 2\pi r^2 + 2\pi r h}$$

($2\pi r$ = cylinderns omkrets)

(5)

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1}{2\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{1}{r}$$

Vi vill hitta minsta värde till funktionen

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{1}{r}, \qquad r > 0.$$

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{1}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 1}{r^2} = 0 \iff r^3 = \frac{1}{4\pi}$$

$$\iff r = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}} \qquad (\approx 0.43 \text{ dm})$$

Klart att $4\pi r^3 - 1$ är strängt växande så

$A'(r) > 0$ då $r > \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$ och

$A'(r) < 0$ då $r < \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$

	0		$\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$	
$A'(r)$		$-$	0	$+$
$A(r)$		$\searrow$	$3\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/3}$	$\nearrow$

Svar:
Vi har minsta värde då

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}} \quad \text{och} \quad h = \frac{1}{2\pi\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{2/3}} = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$$

Arean blir då $A\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}\right) = \cdots\cdots = 3\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/3}$.

Anm: Notera att $h = 2r \approx 0.86$ dm

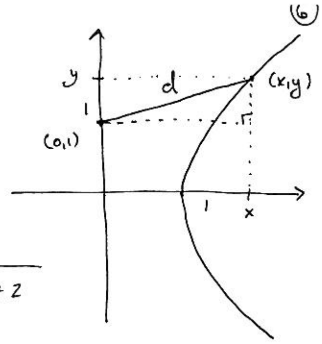
Ex: En komet rör sig längs hyperbelgrenen

$$x^2 - y^2 = 1, \qquad x \geq 0$$

Hur nära kommer kometen punkten $(0,1)$?

(6)

Lösning:



Pythagoras sats ger

$$d^2 = x^2 + (y-1)^2$$

$$\iff d = (\pm)\sqrt{x^2 + (y-1)^2}, \text{ så}$$

$$d = \underset{x^2 = y^2+1}{\sqrt{y^2+1+(y-1)^2}} = \sqrt{2y^2 - 2y + 2}$$

Vi vill hitta minsta värde till $d(y) = \sqrt{2y^2-2y+2}$, $y \in \mathbb{R}$.

Observation: Räcker att hitta minsta värde till

$$f(y) = 2y^2 - 2y + 2, \quad y \in \mathbb{R}.$$

$$f'(y) = 4y - 2 = 0 \iff y = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d(1/2) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

		$1/2$	
$f'(y)$	$-$	0	$+$
$f(y)$	$\searrow$	$3/2$	$\nearrow$

Svar: Det kortaste avståndet är $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Anm: Det är lätt att hitta minsta värde till f genom att kvadratkomplettera:

$$f(y) = 2y^2 - 2y + 2 = 2(y^2 - y + 1) = 2\left((y-\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}\right) =$$

$$= \underbrace{2\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2} \quad \text{med likhet då } y = \frac{1}{2}.$$

I detta fall hade vi inte behövt derivata!

(7)

Olikheter:

Ex: Visa att $\ln(1+4x) > \arctan 3x$ för $x > 0$.

Lösning: Sätt $f(x) = \ln(1+4x) - \arctan 3x$.

Räcker visa att $f(x) > 0$ för $x > 0$. Vi ritar grafen!

$$f'(x) = \frac{1}{1+4x}\cdot 4 - \frac{3}{1+(3x)^2} = \frac{4(1+9x^2) - 3(1+4x)}{(1+4x)(1+9x^2)} =$$

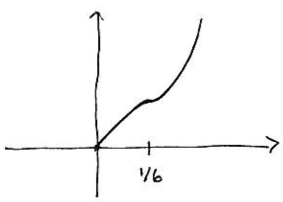
$$= \frac{36x^2 - 12x + 1}{(1+4x)(1+9x^2)} = \frac{\cancel{36}\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right)}{\cancel{36}\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x^2+\frac{1}{9}\right)} = \frac{\overbrace{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2}^{\geq 0}}{\underbrace{\left(x+\frac{1}{4}\right)}_{>0}\underbrace{\left(x^2+\frac{1}{9}\right)}_{>0}} \geq 0 \quad \text{då } x > -\frac{1}{4}$$

med likhet endast då $x = \frac{1}{6}$

	0		$1/6$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$

terrasspunkt

f str. växande då $x \geq 0$



Samtidigt är $f(0) = \ln 1 - \arctan 0 = 0$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \text{ då } x > 0.$$