## Föreläsning 18:

(1)

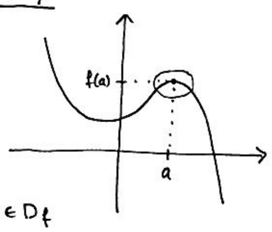
### Lokala extrempunkter:

**Def (lokalt maximum/minimum):**

$f$ har lokalt maximum i $a$ om det finns ett tal $\delta > 0$ sådant att

$f(x) \le f(a)$ för alla $x \in D_f$ sådana att $|x-a| < \delta$

(Om $f(x) < f(a)$, så strängt lokalt maximum)

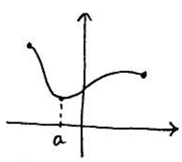



Anm: Motsv. definition för lokalt minimum.

Om vi har lokalt min. eller lokalt max. i $a$ säger vi att $a$ är en lokal extrempunkt, och att $f(a)$ är ett lokalt extremvärde.

**Sats:** Antag $a$ inre punkt i $D_f$. Då gäller

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ har lok. extremv. i } a \\ f \text{ deriverbar i } a \end{array}\right\} \Rightarrow f'(a) = 0$$




Anm: Då $f'(a) = 0$ kallas $a$ stationär punkt.

(2)

**Bevis:** Antag t.ex. $f$ har lok.max. i $a$ $\Rightarrow$

$f(a+h) - f(a) \le 0$ då $h$ är litet. Vi får

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \begin{cases} \le 0 & \text{då } h > 0 \\ \ge 0 & \text{då } h < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \le 0 \text{ och } \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ge 0$$

$\Rightarrow$ högerderivata $\le 0$ och vänsterderivata $\ge 0$.

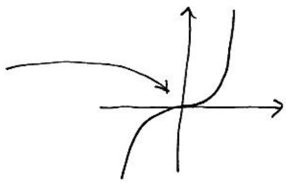
Då $f$ är deriverbar i $a$ gäller högerder. = vänsterder. $= 0$

$\Rightarrow f'(a) = 0$ □

Anm1: Omvändningen gäller inte!

T.ex. $f(x) = x^3$ har derivata $f'(x) = 3x^2$. Vi har då $f'(0) = 0$, men $f$ har varken lok.max. eller lok.min i $x = 0$.

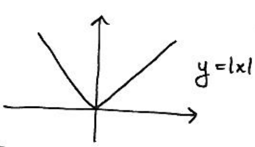
kallas terrasspunkt



Anm2: Vi kan också ha lokala extrempunkter där derivatan ej existerar (där vi har en "spets" i grafen. Exempelvis har $f(x) = |x|$ lokalt min. i $x = 0$,

(3)

men saknar derivata där!



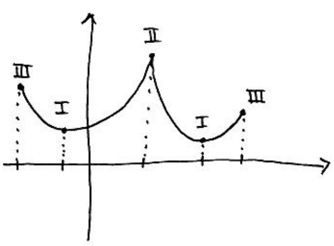

**Sammanfattning:**

En funktion $f$ kan ha lok. extremvärde i $a$ då

I) $f'(a) = 0$

II) $f'(a)$ ej existerar

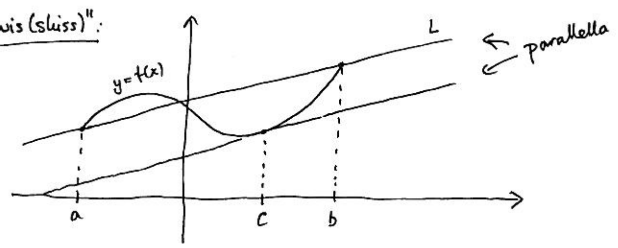
III) $a$ är en randpunkt




**Sats (Medelvärdessatsen):** Om $f$ är kontinuerlig i $a \le x \le b$ och deriverbar i $a < x < b$, så finns det en punkt $c$ $(a < c < b)$ sådan att

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

"Bevis (skiss)":




(4)

Verkar troligt att det finns en tangent till kurvan någonstans i intervallet med samma lutning som $L$.

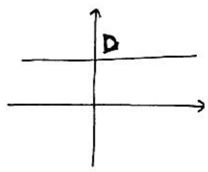
$L$:s lutning $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ □

**Sats:** Om $f'(x) = 0$ i ett helt intervall $a < x < b$, så är $f(x) = D$ (konstant) i $a < x < b$.

**Bevis:** För godtyckliga tal $a < x_0 < x_1 < b$ ger medelvärdessatsen

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0)$$




för något $x_0 < c < x_1$. Enligt förutsättning är $f'(c) = 0$, vilket ger

$f(x_1) - f(x_0) = 0$ dvs. $f(x_0) = f(x_1)$.

Alltså, $f$ har samma värde överallt, dvs. $f(x) = D$ där $D$ är en konstant. □

**Ex:** Visa att $f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x$ är en konstant funktion!

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-1}{1+x^2} = 0$. Enligt satsen ovan är $f(x) = D$ (konstant).

Vilken är konstanten? Sätt t.ex. $x = 1$:

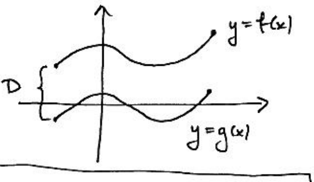
$$D = \arctan 1 + \operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

**Följdsats:** Om $f'(x) = g'(x)$ i ett helt intervall $a<x<b$, så är $f(x) = g(x) + D$ ($D$ konstant)

**Bevis:** $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ enl. förutsättning

$$\overset{\text{Sats}}{\Rightarrow} \quad (f-g)(x) = D \Rightarrow f(x) - g(x) = D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = g(x) + D$$




**Sats:** Om $f$ deriverbar i $]a,b[$ så gäller att

(i) $f'(x) > 0$ i $]a,b[$ $\Rightarrow$ $f$ str. växande i $]a,b[$

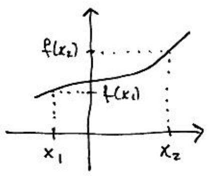
(ii) $f'(x) < 0$ i $]a,b[$ $\Rightarrow$ $f$ str. avtagande i $]a,b[$

**Bevis:** (i):

$$x_1 < x_2 \overset{\text{Medelv.satsen}}{\Rightarrow} f(x_2) - f(x_1) = \overset{>0}{f'(c)}\,\overset{>0}{(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$\Rightarrow f \text{ str. växande}$$




□



**Anm:** $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ växande; $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ avtagande

**Ex:** Visa att $f(x) = e^{\frac{x^2}{2} + \cos x}$ är strängt växande då $x > 0$.

$$f'(x) = e^{\frac{x^2}{2}+\cos x}\left(2\cdot\frac{x}{2} - \sin x\right) = e^{\frac{x^2}{2}+\cos x}(x - \sin x)$$

Vi vet att $e^{\frac{x^2}{2}+\cos x} > 0$ och dessutom gäller $x - \sin x > 0$ då $x > 0$ (eftersom $\sin x < x$ då $x > 0$ enligt tidigare sats). Det följer att

$f'(x) > 0$ då $x > 0$ $\Rightarrow$ $f$ str. växande då $x > 0$.

**Högre derivator:**

**Def:** $n$:te derivatan $D^n f$ definieras rekursivt genom $D^n f = D(D^{n-1} f)$

**Ex:** $f(x) = x^3$, $(Df)(x) = 3x^2$, $(D^2 f)(x) = 6x$

$(D^3 f)(x) = 6$, $(D^4 f)(x) = (D^5 f)(x) = \ldots = 0$

**Räkneregler för högre derivator:**

**Summa:** $D^n(f+g) = D^n f + D^n g$

**Produkt:** $D^n(f \cdot g) = ?$ Vi provar!



$n=1$: $D(f\cdot g) = Df \cdot g + f \cdot Dg$

$n=2$: $D^2(f\cdot g) = D(Df\cdot g + f\cdot Dg) =$

$$= D^2 f \cdot g + Df\cdot Dg + Df \cdot Dg + f \cdot D^2 g =$$

$$= D^2 f\cdot g + 2\cdot Df \cdot Dg + f\cdot D^2 g$$

Liknar kvadreringsregeln. I själva verket gäller

**Leibniz formel**

$$D^n(f\cdot g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} f \cdot D^k g \qquad \begin{pmatrix}\text{OBS!} \\ D^0 f = f\end{pmatrix}$$

**Ex:** Beräkna $D^{100}(e^{-3x}\cdot x^2)$!

$$D^{100}(e^{-3x}\cdot x^2) = \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k} D^{100-k}(e^{-3x})\, D^k(x^2) =$$

$$= \binom{100}{0} D^{100}(e^{-3x})\cdot x^2 + \binom{100}{1} D^{99}(e^{-3x})\cdot 2x +$$

$$+ \binom{100}{2} D^{98}(e^{-3x})\cdot 2 + \underbrace{\binom{100}{3} D^{97}(e^{-3x})\cdot 0}_{=0} + 0 + 0 + \cdots + 0 =$$

$$= 1\cdot(-3)^{100}\cdot e^{-3x}\cdot x^2 + 100\cdot(-3)^{99}\cdot e^{-3x}\cdot 2x +$$

$$+ 4950\cdot(-3)^{98}\cdot e^{-3x}\cdot 2 = 3^{99} e^{-3x}(3x^2 - 200x + 3300)$$