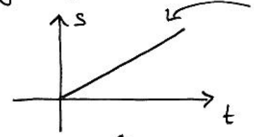
Föreläsning 16

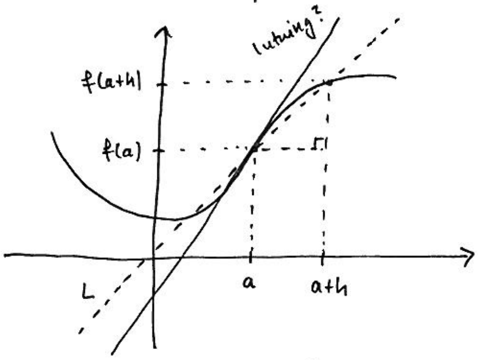
(1)

Derivata:

Derivata ≈ hur snabbt en funktion förändras i en given punkt.

$\boxed{s = v \cdot t}$





Linjen L har lutningen $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Uppskattningen blir bättre ju mindre h görs. Verkar rimligt att studera $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Om gränsvärdet existerar (ändligt) säger vi att f är <u>deriverbar</u> i a med <u>derivatan</u>

(2)

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Ex: Beräkna derivatan för $f(x)=x^2$ i $x=a$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2-a^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{a^2}+2ah+h^2-\cancel{a^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{h}{h}}_{=1}\cdot(2a+h) = 2a$$

Slutsats: $f'(a)=2a$ (dvs. $f'(x)=2x$ (Bekant?))

Ex: Beräkna derivatan för $f(x)=e^x$ i $x=a$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{a+h}-e^a}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} e^a \cdot \frac{e^h-1}{h} = e^a \cdot 1 = e^a$$

Slutsats: $f'(a)=e^a$ (dvs. $f'(x)=e^x$)

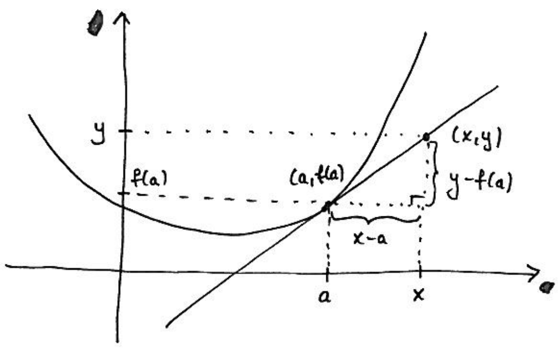
Funktionen har sig själv som derivata!

> Alternativa beteckningar för derivata:
>
> $$f'(a),\quad Df(a),\quad \frac{df}{dx}(a)$$

Tangent och normal

(3)

> Def (tangent): Linjen genom punkten $(a, f(a))$ med riktn.koeff. $f'(a)$ kallas <u>tangenten</u> till f i $(a, f(a))$.

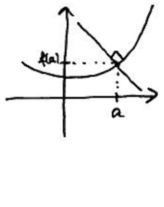


Lutningen $f'(a) = \dfrac{y-f(a)}{x-a}$ ger formeln

$$\boxed{\text{Tangent:}\quad y - f(a) = f'(a)(x-a)}$$

<u>Normalen</u> till f i $(a, f(a))$ har ekvationen

$$\boxed{\text{Normal:}\quad y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)}$$



(4)

Ex: Bestäm ekvationer för tangenten resp. normalen till $f(x)=x^2$ i punkten $(1, f(1))$.

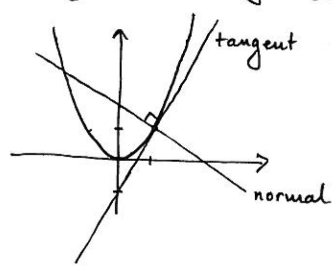
Lösning: Vi såg ovan att $f'(x)=2x \Rightarrow f'(1)=2$.

Eftersom $f(1)=1$ får vi tangentens ekvation

$$y-1 = 2(x-1) \iff y = 2x-1.$$

För normalen får vi

$$y-1 = -\tfrac{1}{2}(x-1) \iff y = -\tfrac{1}{2}x + 3/2$$



Deriveringsregler:

> Def: Vi säger att f är <u>deriverbar</u> om f är deriverbar i varje punkt i definitionsmängden, dvs.
>
> $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existerar för alla a i D_f.

Def (kontinuerlig, repetition): Vi säger att f är <u>kontinuerlig</u> om $f(x) \to f(a)$ då $x \to a$ för alla a i D_f. Alternativt (sätt $x = a+h$)

$f(a+h) \to f(a)$ då $h \to 0$ för alla a i D_f (5)

<u>Sats:</u> Om f är deriverbar, så är f kontinuerlig.

<u>Bevis:</u> Antag f är deriverbar i a. Då gäller

$$f(a+h) - f(a) = \underbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{\to f'(a)} \cdot \overset{\to 0}{h} \to f'(a) \cdot 0 = 0$$

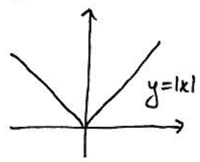
$\Rightarrow$ $f(a+h) \to f(a)$ då $h \to 0$, dvs. f är kontinuerlig i a. $\square$

OBS! Omvändningen gäller <u>inte</u>!

<u>Ex:</u> $f(x) = |x|$ är kontinuerlig (se figur!), men ej deriverbar i $x=0$.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$$



" $\lim_{h\to 0^+}$ $\neq$ $\lim_{h\to 0^-}$ " $\Rightarrow$ " $\lim_{h\to 0}$ " saknas $\Rightarrow$ f ej deriverbar i $x=0$.

<u>Anm:</u> Vi säger att $f(x) = |x|$ har <u>högerderivata</u> 1 och <u>vänsterderivata</u> -1 i $x=0$.

Sats (Räkneregler för derivata) (6)

Om f, g är deriverbara, så gäller

(i) $(\alpha f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)$, α konstant

(ii) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(iii) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(iv) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ om $g(x) \neq 0$.

<u>Bevis:</u> Vi bevisar (iii):

$$\frac{(f\cdot g)(x+h) - (f\cdot g)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h)-g(x))}{h} =$$

$$= \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x)} \cdot \underbrace{g(x+h)}_{\to g(x)\,*)} + f(x) \cdot \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)}$$

$\longrightarrow$ $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ då $h \to 0$

*) g deriverbar $\Rightarrow$ g kontinuerlig $\Rightarrow$ $g(x+h) \to g(x)$ då $h \to 0$. $\square$

Vi vet redan att $f(x) = x^2$ har derivatan $f'(x) = 2x$. (7)
Låt oss bestämma några fler derivator:

<u>Ex:</u>

- $f(x) = x$ $\Rightarrow$ $f'(x) = 1$, ty

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)-x}{h} = \frac{h}{h} = 1 \to \underline{\underline{1}} \text{ då } h \to 0.$$

- $f(x) = C$ (konstant) $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$, ty

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{C-C}{h} = 0 \to \underline{\underline{0}} \text{ då } h \to 0.$$

<u>Ex (räkneregler):</u> $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$ $\overset{i,\, ii,\, iv}{\Longrightarrow}$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2-6x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= (-2) \cdot \frac{x^2+3x-1}{(x^2+1)^2}.$$

Sats (Kedjeregeln): Om g deriverbar i x och f deriverbar i $g(x)$ så är $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ deriverbar i x med $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

<u>Bevis:</u> Läs själva!

<u>Anm:</u> Derivatan $g'(x)$ brukar kallas <u>inre derivata</u>.

<u>Ex:</u> $f(g(x)) = (4x-1)^2$ med $f(y) = y^2$ och $g(x) = 4x-1$.

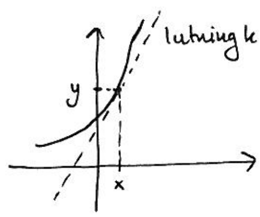
Vi vet att $f'(y) = 2y$ och $g'(x) = 4$.

Detta ger $D\,(4x-1)^2 = 2\cdot(4x-1)\cdot \underset{\text{inre derivata}}{4} = 32x - 8$. (8)

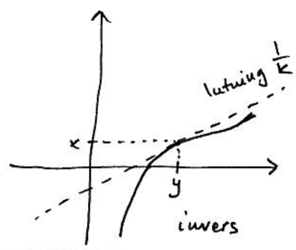
Vi kollar att det funkar:

$(4x-1)^2 = 16x^2 - 8x + 1$ $\Rightarrow$ $D(16x^2 - 8x + 1) = 32x - 8$ ok!

<u>Derivata av en invers:</u>



funktion



invers

Sats: Om f är deriverbar i x ($f'(x) \neq 0$) och har en ~~...~~ invers f^{-1}, så är f^{-1} deriverbar i $y = f(x)$ med $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

<u>Bevis:</u> Läs själva!

<u>Ex:</u> Vi har $y = f(x) = e^x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \ln y$.

Detta ger $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$.

<u>Slutsats:</u> $D \ln y = \frac{1}{y}$ (dvs. $D \ln x = \frac{1}{x}$).

Bekant?