Föreläsning 15:

Exempel på gränsvärdesräkningar (spec. fallet "0/0"):

Ex: Beräkna $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$! $\left(\text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}\right)$

$$\frac{\tan x}{x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{\cos x}\to 1\cdot\frac{1}{\cos 0}=\underline{\underline{1}}$$

då $x\to 0$.

Ex: Beräkna $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$! $\left(\text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}\right)$

$$\frac{\ln(1+\sin x)}{x}=\underbrace{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}}_{\to 1 \; *)}\cdot\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\to 1\cdot 1=\underline{\underline{1}} \text{ då } x\to 0$$

$$*)\quad \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}=\begin{bmatrix} t=\sin x \\ t=\sin x\to\sin 0=0 \text{ då } x\to 0\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t}\to 1 \quad \text{då } t\to 0.$$

Ex: Beräkna $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\arcsin x}$! $\left(\text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}\right)$

$$\frac{\tan 2x}{\arcsin x}=\underbrace{\frac{\tan 2x}{2x}}_{\to 1}\cdot\overbrace{\frac{x}{\arcsin x}}^{*)\to 1}\cdot 2\to 1\cdot 1\cdot 2=\underline{\underline{2}}$$

då $x\to 0$

(gör som i första exemplet)

$$*)\quad \frac{x}{\arcsin x}=\begin{bmatrix} t=\arcsin x \iff x=\sin t,\ -\pi/2<t<\pi/2 \\ t=\arcsin x\to\arcsin 0=0 \text{ då } x\to 0\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\sin t}{t}\to 1 \quad \text{då } t\to 0$$

Ex: Beräkna $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-x-2}$! $\left(\text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}\right)$

Vi faktoriserar x^2-x-2 ! $\quad x^2-x-2=0 \iff \begin{cases} x=-1 \\ x=2\end{cases}$ (el.)

$$\frac{x-2}{x^2-x-2}=\frac{x-2}{(x-2)(x+1)}=\frac{1}{x+1}\to\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

då $x\to 0$.

Ex: Beräkna $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e\ln x}{e^x-e}$! $\left(\text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}\right)$

Gränsövergång $x\to 1$ ställer till problem. Vi fixar med ett lämpligt variabelbyte till gränsövergång mot 0:

$$\frac{e\ln x}{e^x-e}=\begin{bmatrix} t=x-1 \iff x=1+t \\ x\to 1 \iff t\to 0\end{bmatrix}=\frac{e\ln(1+t)}{e^{1+t}-e}=$$

$$=\underbrace{\frac{e}{e}}_{=1}\cdot\frac{\ln(1+t)}{e^t-1}=\frac{\ln(1+t)}{t}\cdot\frac{t}{e^t-1}=$$

$$=\underbrace{\frac{\ln(1+t)}{t}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{\underbrace{\frac{e^t-1}{t}}_{\to 1}}\to 1\cdot\frac{1}{1}=\underline{\underline{1}} \quad \text{då } t\to 0.$$

Alt. Beräkna $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-x-2}$!

$$\frac{x-2}{x^2-x-2}=\begin{bmatrix} t=x-2 \iff x=t+2 \\ x\to 2 \iff t\to 0\end{bmatrix}=\frac{t}{(t+2)^2-(t+2)-2}=$$

$$=\frac{t}{t^2+4t+4-t-2-2}=\frac{t}{t^2+3t}=\frac{1}{t+3}\cdot\overbrace{\frac{t}{t}}^{"1"}=$$

$$=\frac{1}{t+3}\to\frac{1}{0+3}=\frac{1}{3} \quad \text{då } t\to 0.$$

Ex: Beräkna $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^x$! $\left(\text{"}1^{\infty}\text{"}\right)$

$$\left(1+\frac{1}{3x}\right)^x=\begin{bmatrix} t=3x \iff x=\frac{t}{3} \\ x\to\infty \iff t\to\infty\end{bmatrix}=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t/3}=$$

$$=\Big(\underbrace{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}_{\to e}\Big)^{1/3}\to\underline{\underline{e^{1/3}}} \quad \text{då } t\to\infty.$$

Ex: Beräkna $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$! $\left(\text{"}1^{-\infty}\text{"}\right)$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\begin{bmatrix} t=-x \iff x=-t \\ x\to-\infty \iff t\to\infty\end{bmatrix}=\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=$$

$$=\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}=\left(\frac{t}{t-1}\right)^t=\left(\frac{t-1+1}{t-1}\right)^t=$$

$$=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=\begin{bmatrix} s=t-1 \iff t=s+1 \\ t\to\infty \iff s\to\infty\end{bmatrix}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{s}\right)^{s+1}=\underbrace{\left(1+\frac{1}{s}\right)^s}_{\to e}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{s}\right)}_{\to 1+0=1}\to e\cdot 1=\underline{\underline{e}}$$

då $s\to\infty$.

Anm (Beteckning):

Alt. 1: $\dfrac{\sin 3x}{4x}=\blacksquare=\blacksquare=\blacksquare=\blacksquare=\blacksquare\longrightarrow\dfrac{3}{4}$ då $x\to 0$

Alt. 2: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\blacksquare=\lim\limits_{x\to 0}\blacksquare=\lim\limits_{x\to 0}\blacksquare=\dfrac{3}{4}$

Fallet "$\dfrac{1}{0}$": Tolkas (oftast) som $\pm\infty$, beroende på tecken.

Ex: Beräkna de ensidiga gr.värdena $x\to 0^+$, $x\to 0^-$, $x\to -1^+$, $x\to -1^-$ av

$$f(x)=\frac{1}{x(x+1)} \;!$$

$$\frac{1}{x(x+1)}\longrightarrow\begin{cases} \text{"}\dfrac{1}{0^+\cdot 1}\text{"}=\infty & \text{då } x\to 0^+ \\ \text{"}\dfrac{1}{0^-\cdot 1}\text{"}=-\infty & \text{då } x\to 0^-\end{cases}$$

$$\frac{1}{x(x+1)}\longrightarrow\begin{cases} \text{"}\dfrac{1}{(-1)\cdot 0^+}\text{"}=-\infty & \text{då } x\to -1^+ \\ \text{"}\dfrac{1}{(-1)\cdot 0^-}\text{"}=\infty & \text{då } x\to -1^-\end{cases}$$

5

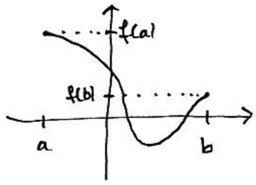
Egenskaper hos kontinuerliga funktioner:

Repetition: f är kontinuerlig i a om

$$f(x) \to f(a) \quad \text{då } x \to a.$$

Sats: Om f kontinuerlig i intervallet $a \le x \le b$ (slutet, begränsat intervall) så gäller

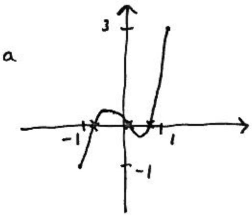
A) f antar varje värde mellan $f(a)$ och $f(b)$ i intervallet $[a,b]$



B) f antar ett största och minsta värde i $[a,b]$.

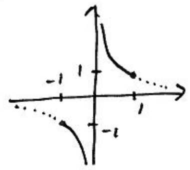
Ex: Visa att $3x^3 - x + 1 = 0$ har en rot i intervallet $[-1,1]$!

Lösning: $f(x) = 3x^3 - x + 1$ är kontinuerlig i $[-1,1]$ och $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$.
Enligt A) ovan antar f alla värden mellan -1 och 3 i intervallet $\Rightarrow f(x_0) = 0$ för något tal x_0, $-1 < x_0 < 1$.



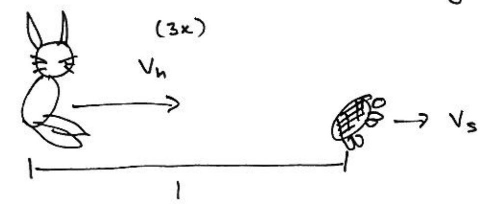
6

Ex: För $f(x) = \frac{1}{x}$ gäller $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$.
Men $f(x_0) \neq 0$ för alla mellanliggande ~~värden~~ punkter x_0.
A) och B) gäller ej!
Anledning: f ej def. i $x=0$, så f ej kontinuerlig i $[-1,1]$.



Serier = "oändliga summor":

Hare och sköldpadda kapplöper (Zenons paradox)
Haren har 3 ggr. så hög fart som sköldpaddan, men sköldpaddan har 1 km försprång.
Hur långt har haren sprungit då den hinner ifatt sköldpaddan? Efter hur lång tid?



$\boxed{s = v \cdot t}$ $\quad 1 + S_s = S_h$, där $\begin{cases} S_h = V_h \cdot t \\ S_s = V_s \cdot t \\ V_h = 3 \cdot V_s \end{cases}$

$$1 + S_s = S_h \iff 1 + V_s \cdot t = V_h \cdot t$$

7

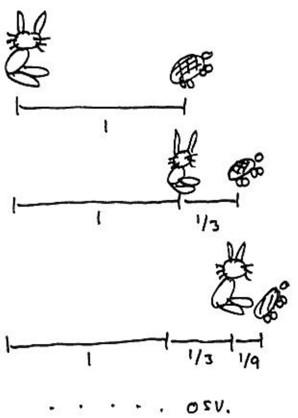
$$\iff 1 + \frac{V_h}{3} t = V_h t \iff \frac{2}{3} V_h t = 1$$

$$\iff t = \frac{3}{2V_h}. \quad \text{Detta ger } S_h = V_h \cdot t =$$

$$= V_h \cdot \frac{3}{2V_h} = \frac{3}{2} = \underline{\underline{1.5 \text{ km}}}$$

Svar: 1.5 km resp. $\frac{3}{2V_h}$ tidsenheter.

Vi tänker på ett annat sätt:



Haren hinner aldrig ifatt sköldpaddan!

Eller?

Problem?

. . . . . . osv.

$$S_h = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots\cdots = 1.5 \quad (?)$$

oändligt många termer

$$t = \frac{1}{V_h} + \frac{1/3}{V_h} + \frac{1/9}{V_h} + \cdots\cdots = \frac{1.5}{V_h} \quad (?)$$

8

Geometrisk summa:

$$a + ax + ax^2 + \cdots + ax^n =$$

$$= a(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = a \cdot \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Om $-1 < x < 1$ gäller $x^{n+1} \to 0$ då $n \to \infty$

Vi får då $a \cdot \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \to a \cdot \frac{0 - 1}{x - 1} = a \cdot \frac{1}{1 - x}$ då $n \to \infty$

Sats:
Den geometriska serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} ax^k = a + ax + ax^2 + \cdots\cdots$$

är konvergent (har ändligt gränsvärde) med summan $a \cdot \frac{1}{1-x}$ precis då $-1 < x < 1$.

Anm: Om serien saknar gr.värde kallas den divergent.

Ex: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots\cdots =$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots\cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

eftersom $-1 < 1/3 < 1$.