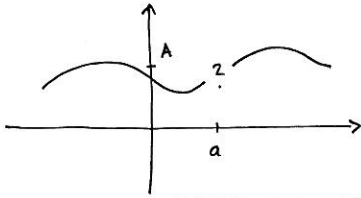


Föreläsning 14:

①

Gränsvärde då $x \rightarrow a$:

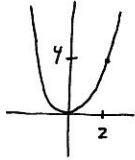


Def ($f(x) \rightarrow A$ då $x \rightarrow a$): Låt a, A vara tal.
 Vi skriver $f(x) \rightarrow A$ då $x \rightarrow a$ (alt. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$)
 om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett tal $\delta_\epsilon > 0$ sådant
 att $|f(x) - A| < \epsilon$ för alla $0 < |x - a| < \delta_\epsilon$

Anm: Betyder att $f(x)$ kommer godtyckligt nära A
 bara x är tillräckligt nära a .

Anm2: Även för gr. värden då $x \rightarrow a$ gäller "naturliga"
 räkneregler för de fyra räknesätten och funktions-
 sammansättning. Även instängningssatser fungerar som
 i fallet $x \rightarrow \infty$.

Ex: $f(x) = x^2 \rightarrow 2^2 = 4$ då $x \rightarrow 2$
 helt "naturligt"



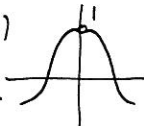
Eftersom $\frac{1}{\cos x} \rightarrow \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$ då $x \rightarrow 0^+$ följer
 det av instängning att $\frac{x}{\sin x} \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0^+$, dvs.

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1 \text{ då } x \rightarrow 0^+$$

Funktionen $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ är jämn, eftersom

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$$

Vi inser att även $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0^-$

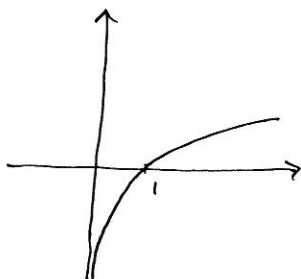
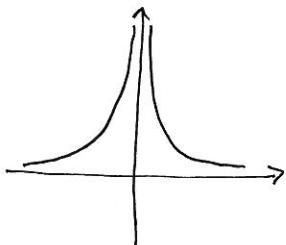


Slutsats: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

D

Anm: Det går även att naturligt införa oegentliga
 gränsvärden $\pm \infty$ då $x \rightarrow a$ resp. $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$

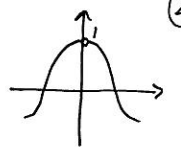
Ex: a) $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0$ b) $\ln x \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow 0^+$



Men, mer intressant,

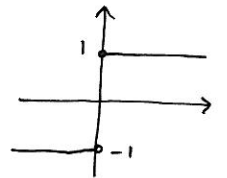
$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \text{ då } x \rightarrow 0$$

("färligt fall" $\frac{0}{0}$). Detta visas nedan.



②

Ex: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x \geq 0 \\ -1 & \text{då } x < 0 \end{cases}$



Här salvas gr.värdet $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Funktionen närmar sig inte ett specifikt tal.

Däremot har $f(x)$ både vänster- och högergränsvärde
 då $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

Anm: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

Ex: Visa att $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0$.

Vi vet sedan tidigare att $\sin x < x < \tan x$ då $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Låt $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Vi får då

$$\sin x < x < \tan x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$

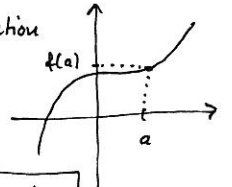
$$\Leftrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} \Leftrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Kontinuitet:

④

Det "vanligaste" fallet då en funktion
 f är definierad i a är att

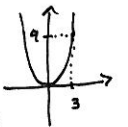
$$f(x) \rightarrow f(a) \text{ då } x \rightarrow a$$



Def: Vi säger att f är kontinuerlig i a
 om $f(x) \rightarrow f(a)$ då $x \rightarrow a$

Ex: $f(x) = x^2$ är t.ex. kontinuerlig
 i 3, eftersom

$$f(x) = x^2 \rightarrow 3^2 = f(3) \text{ då } x \rightarrow 3$$

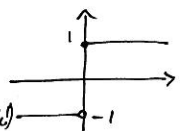


Den är för övrigt kontinuerlig i alla punkter.

Ex: Funktionen $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x \geq 0 \\ -1 & \text{då } x < 0 \end{cases}$

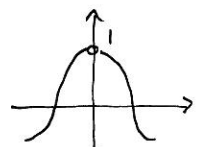
är ej kontinuerlig i 0.

Gränsvärdet då $x \rightarrow 0$ salvas!
 (Den är kontinuerlig i alla andra punkter dock!)



Ex: Funktionen $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

är ej kontinuerlig i 0. Den är
 ju inte ens definierad där!



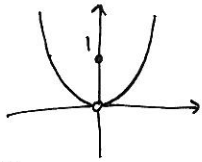
Däremot är den kontinuerlig i övriga punkter.

Ex: Funktionen $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{då } x \neq 0 \\ 1 & \text{då } x = 0 \end{cases}$ (5)

har visserligen ett gränsvärde då $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Men då detta inte är lika med $f(0) = 1$ är f ej kontinuerlig i 0. (I övriga punkter är f kontinuerlig)



Def: En funktion f sägs vara kontinuerlig om funktionen är kontinuerlig i varje punkt i dess definitionsmängd.

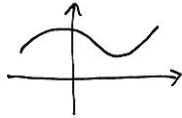
Ex: $f(x) = x^2$ är kontinuerlig

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x > 0 \\ -1 & \text{då } x < 0 \end{cases}$ är ej kontinuerlig

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ är kontinuerlig (!)

$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{då } x \neq 0 \\ 1 & \text{då } x = 0 \end{cases}$ är ej kontinuerlig

Grafisk tolkning: Att f är kontinuerlig betyder att dess graf är sammanhängande och saknar "språng" (i varje intervall i D_f)



$$= \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{t} \\ x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow \pm\infty \end{array} \right] = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \quad (7)$$

$$\rightarrow \ln e = 1 \text{ då } t \rightarrow \pm\infty.$$

$$c) \frac{e^x - 1}{x} = \left[\begin{array}{l} t = e^x - 1 \Leftrightarrow x = \ln(1+t) \\ x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{t}{\ln(1+t)} = \frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1 \text{ då } t \rightarrow 0.$$

d) Läs själva! (Gör bytet $t = 1/x$!) \square

Standardgränsvärden behövs för att hantera de "färliga" fallen:

" $\infty - \infty$ ", " $0 \cdot \infty$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ ", " $\frac{0}{0}$ ", " 1^∞ ", " 0^0 ", " ∞^0 "

Ex: Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{x}$! (" $\frac{0}{0}$ ")

$$\frac{\ln(1+4x)}{x} = 4 \cdot \frac{\ln(1+4x)}{4x} = \left[\begin{array}{l} t = 4x \Leftrightarrow x = \frac{t}{4} \\ x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right] =$$

$$= 4 \cdot \frac{\ln(1+t)}{t} \rightarrow 4 \cdot 1 = 4 \text{ då } t \rightarrow 0$$

Sats: Varje uttryck i elementära funktioner, de fyra räknesätten och funktionsammansättning ger en kontinuerlig funktion.

Ex: Funktionen

$$f(x) = \frac{\sin(x^2 + \ln x) - \frac{1}{\cos x + e^{x^2}}}{(x-4)\sqrt{\tan x + 8} - 4 \log x}$$

är kontinuerlig! \square

Standardgränsvärden då $x \rightarrow a$:

Sats: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \quad (\alpha > 0)$

Bevis: a) Redan visat.

b) $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \ln(1+x) = \ln(1+x)^{1/x} =$

Ex: Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$! (" $\frac{0}{0}$ ") (8)

$$\frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)} \rightarrow \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{4} \text{ då } x \rightarrow 0. \quad \square$$

Ex: Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^2}$! (" 0^0 ")

$$x^{x^2} = e^{\ln x^{x^2}} = e^{x^2 \ln x} \rightarrow e^0 = 1 \text{ då } x \rightarrow 0^+$$

OBS! $x^{x^2} \rightarrow x^0 = 1$ då $x \rightarrow 0^+$ FEL!
 $x^{x^2} \rightarrow 0^{x^2} = 0$ då $x \rightarrow 0^+$ FEL!
 Kallas stegvis gränsovergång.