(1)

## Föreläsning 13:

### Gränsvärde då $x \to \infty$:

Vad händer med funktionen

$$f(x) = \frac{x}{2x+1} \quad \text{för stora } x \,?$$

Då $x$ stort är $\dfrac{x}{2x+1} \approx \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$. Funktionen $f(x)$ borde närma sig värdet $1/2$ då $x$ blir stort.
I själva verket kan $f(x)$ komma godtyckligt nära $1/2$ bara $x$ är tillräckligt stort.

**Def ($f(x) \to A$ då $x \to \infty$):** Låt $A$ vara ett tal.
Vi skriver $f(x) \to A$ då $x \to \infty$ (alt. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$) om det för varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\omega_\varepsilon$ sådant att

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{för alla } x > \omega_\varepsilon$$

(dvs. $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ för alla $x > \omega_\varepsilon$)

Ex: Vi försöker visa att $f(x) = \dfrac{x}{2x+1} \to \dfrac{1}{2}$ då $x \to \infty$. Välj därför ett $\varepsilon > 0$.

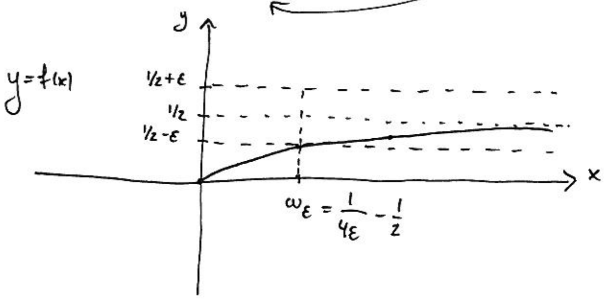
(2)

$$\left|\frac{x}{2x+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2x-(2x+1)}{2(2x+1)}\right| = \left|\frac{-1}{2(2x+1)}\right| =$$

$$= \frac{1}{|4x+2|} < \varepsilon \iff |4x+2| > \frac{1}{\varepsilon}$$

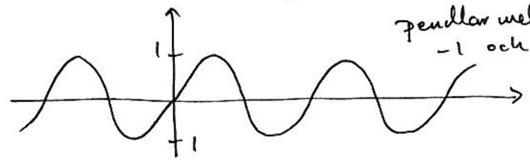
$$\iff 4x+2 > \frac{1}{\varepsilon} \quad \left(\text{eller } 4x+2 < -\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

dvs. $x > \dfrac{1}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2} = \omega_\varepsilon$ ← stort då $\varepsilon$ litet.




Slutsats: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x+1} = \dfrac{1}{2}$.

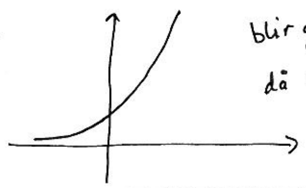
Ex: $f(x) = \sin x$ saknar gränsvärde då $x \to \infty$.




(3)

### Oegentliga gränsvärden då $x \to \infty$:

$f(x) = e^x$



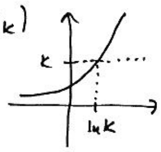
blir godtyckligt stor då $x$ tillräckligt stor

**Def ($f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$):**
Vi skriver $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ (alt. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$) om det för varje tal $K$ finns ett tal $\omega_K$ sådant att

$$f(x) > K \quad \text{för alla } x > \omega_K$$

Ex: $f(x) = e^x \to \infty$ då $x \to \infty$ eftersom

$$e^x > K \quad \text{då } x > \ln K \ (= \omega_K)$$



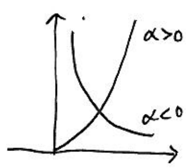

Anm: Vi kan på motsvarande sätt definiera gr.värden $f(x) \to A$ och $f(x) \to \infty$ då $x \to -\infty$. (Vi kan även def. det oegentliga gränsvärdet $-\infty$.)

**Problem:** Vi kan inte hela tiden gå tillbaka till definitionen för att bestämma gränsvärden.

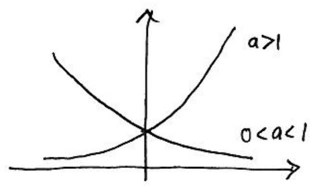
(4)

**Lösning:**
- Visa ett antal standardgränsvärden som vi fritt kan referera till
- Visa ett antal räkneregler för gränsvärden.

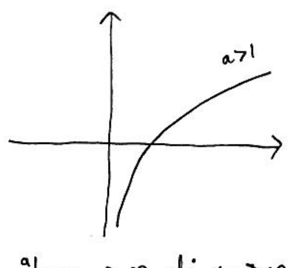
### Standardgränsvärden (elementära funktioner):



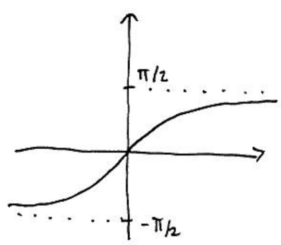

$$x^\alpha \to \begin{cases} \infty & \text{om } \alpha > 0 \\ 0 & \text{om } \alpha < 0 \end{cases}$$
då $x \to \infty$




$$a^x \to \begin{cases} \infty & \text{om } a > 1 \\ 0 & \text{om } 0 < a < 1 \end{cases}$$
då $x \to \infty$




${}^a\log x \to \infty$ då $x \to \infty$




$$\arctan x \to \begin{cases} \pi/2 & \text{då } x \to \infty \\ -\pi/2 & \text{då } x \to -\infty \end{cases}$$

Ex: $\frac{1}{x} \to 0$ då $x \to \infty$, $\ln x \to \infty$ då $x \to \infty$ ⑤

D

Ex: Beräkna $\lim_{x\to-\infty} 3^x$.

$$\lim_{x\to-\infty} 3^x = \left[\begin{array}{l} t=-x \Leftrightarrow x=-t \\ x\to-\infty \Leftrightarrow t\to\infty \end{array}\right] = \lim_{t\to\infty} 3^{-t} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^t = 0$$

D

Räkneregler för gränsvärden:

**Sats:** Låt A och B vara tal.

Om $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ och $\lim_{x\to\infty} g(x) = B$, så är

$$\lim_{x\to\infty} (f(x)+g(x)) = A + B$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) = A \cdot B$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \qquad (\text{om } B \neq 0)$$

Ex: $3\arctan x - \frac{x}{2x+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x \longrightarrow$

$$\longrightarrow 3\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{3\pi}{2} \quad \text{då } x\to\infty.$$

Anm: Det finns en motsvarande räkneregel för sammansättning.

Räknereglerna fungerar även då $A = \pm\infty$ i vissa fall ⑥

Ex: $2^x \cdot \ln x + \frac{x}{2x+1} \to$ "$\infty\cdot\infty + \frac{1}{2}$" $= \infty$

då $x \to \infty$.

Vissa formella räkningar "..." kan vi inte hantera (= farliga fall)

Ex: Beräkna $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-2x+1}{3x^3+x}$

$\frac{2x^3-2x+1}{3x^3+x} \to$ "$\frac{\infty}{\infty}$" funkar ej – farligt fall

Bryt ut täljarens respektive nämnarens dominerande term:

$$\frac{2x^3-2x+1}{3x^3+x} = \underbrace{\frac{x^3}{x^3}}_{=1} \cdot \frac{2-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3+\frac{1}{x^2}} \to \frac{2-0+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

då $x\to\infty$.

D

Ex: Beräkna $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x} - x\right)$ !

Av typ "$\infty-\infty$" (ett annat farligt fall).

Förläng med konjugatuttrycket:

$$\sqrt{x^2-x} - x = \frac{(\sqrt{x^2-x}-x)(\sqrt{x^2-x}+x)}{\sqrt{x^2-x}+x} = \frac{(x^2-x)-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x} =$$

⑦

$$= \frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} = \underbrace{\frac{x}{x}}_{=1} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1} \to \frac{-1}{\sqrt{1-0}+1} = -\frac{1}{2}$$

då $x\to\infty$

Hur bestämmer man "dominerande term" om funktionerna är av olika typ?

**Sats:**

i) $\frac{{}^a\log x}{x^\alpha} \to 0$ då $x\to\infty$

ii) $\frac{x^\alpha}{a^x} \to 0$ då $x\to\infty$

långsammast ⟷ snabbast

log. funk. – potensfunk. – exp. funk.

Ex: Beräkna $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x+x^4+\ln x}{3^x+x^3\ln x}$ ! "$\frac{\infty}{\infty}$"

Bryt ut dominerande termer:

$$\frac{2^x+x^4+\ln x}{3^x+x^3\ln x} = \frac{2^x}{3^x}\cdot\frac{1+\frac{x^4}{2^x}+\frac{\ln x}{2^x}}{1+\frac{x^3\ln x}{3^x}} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^x}_{\to 0} \cdot \frac{1+\underbrace{\frac{x^4}{2^x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{\ln x}{2^x}}_{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{x^3}{(\sqrt{3})^x}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{\ln x}{(\sqrt{3})^x}}_{\to 0}} \to 0\cdot\frac{1+0+0}{1+0\cdot 0} = \underline{\underline{0}}$$

då $x\to\infty$

Jämförelsesatser: ⑧

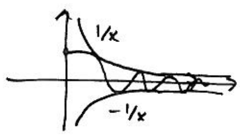
Ex: Beräkna $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ ! (Vi kan anta att $x>0$)

Eftersom $-1 \le \sin x \le 1$, så är

$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\to 0} \le \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 0} \le \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}$$

Funktionen $\frac{\sin x}{x}$ är "inklämd" mellan två funktioner som båda går mot 0.

Slutsats: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$.




Definition av talet e:

**Def (Talet e):**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Anm: Farligt fall "$1^\infty$".

Anm2: Det går att visa att även $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (!)

$e \approx 2.71828\ldots$

OBS! $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to (1+0)^x = 1^x \to 1$ då $x\to\infty$

ej tillåtet. "Stegvis" gränsövergång.