Föreläsning 14

(1)

Ex (repetition): Lös ekvationen

$$y'' + 9y = \cos 3x.$$

Lösning: $\boxed{y = y_h + y_p}$

Bestäm y_h: Kar. ekv. $p(r) = r^2 + 9 = 0 \iff r = \pm 3i$

vilket ger $y_h = A\cos 3x + B\sin 3x$

Bestäm y_p: Lös först hjälpekvationen

$$(*) \qquad y'' + 9y = e^{i3x} \quad (= \underbrace{\cos 3x}_{\text{Realdel}} + i\sin 3x)$$

Sätt $y = z e^{i3x}$. Vi får

$$y' = z' e^{i3x} + 3iz e^{i3x} = e^{i3x}(z' + 3iz)$$

$$y'' = z'' e^{i3x} + 3iz' e^{i3x} + 3iz' e^{i3x} + (3i)^2 z e^{i3x} =$$

$$= e^{i3x}(z'' + 6iz' - 9z)$$

Insättning i $(*)$ ger

$$\cancel{e^{i3x}}\left((z'' + 6iz' - 9z) + 9z\right) = \cancel{e^{i3x}}$$

$\iff \quad z'' + 6iz' = 1.$ Sätt $z = Ax$.

Vi får $z' = A$, $z'' = 0$, och $0 + 6iA = 1$

(2)

$\iff A = \dfrac{1}{6i} = -\dfrac{i}{6}$. Detta ger $z = -\dfrac{i}{6}x$, och

$$y_0 = -\frac{i}{6}x e^{i3x} = -\frac{i}{6}x(\cos 3x + i\sin 3x) =$$

$$= \frac{x}{6}\sin 3x + i\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right) \text{ löser hjälpekv. } (*).$$

Alltså är $y_p = \dfrac{x}{6}\sin 3x \quad (= \operatorname{Re} y_0)$ en partikulärlösning till vår ekvation.

Svar: $y = y_h + y_p = A\cos 3x + B\sin 3x + \dfrac{x}{6}\sin 3x$.

Anm: Eftersom $y_0 = \frac{x}{6}\sin 3x + i\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)$ löser hjälpekv. gäller

$$\left(\frac{x}{6}\sin 3x + i\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)\right)'' + 9\left(\frac{x}{6}\sin 3x + i\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)\right) = \cos 3x + i\sin 3x$$

$$\iff \left(\frac{x}{6}\sin 3x\right)'' + i\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)'' + 9\left(\frac{x}{6}\sin 3x\right) + i\cdot 9\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right) = \cos 3x + i\sin 3x$$

$$\iff \left(\left(\frac{x}{6}\sin 3x\right)'' + 9\left(\frac{x}{6}\sin 3x\right)\right) + i\cdot\left(\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)'' + 9\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)\right) = \cos 3x + i\sin 3x$$

Alltså följer att

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{6}\sin 3x\right)'' + 9\left(\frac{x}{6}\sin 3x\right) = \cos 3x \\ \left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)'' + 9\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right) = \sin 3x \end{cases}$$

och vi ser att $\operatorname{Re} y_0 = \frac{x}{6}\sin 3x$ löser vår ekvation!

(3)

> **Allmänt:** Om y_0 löser hjälpekv. $y'' + ay' + by = p(x)e^{i\alpha x}$
>
> så gäller att $\begin{cases} \operatorname{Re} y_0 \text{ löser } y'' + ay' + by = p(x)\cos\alpha x \\ \operatorname{Im} y_0 \text{ löser } y'' + ay' + by = p(x)\sin\alpha x \end{cases}$

Ex: Hitta <u>en</u> lösning till

$$y'' + 9y = \cos 3x + 9x^2. \qquad (*)$$

Lsg: En lösning till $(*)$ ges av $y_P = y_{P_1} + y_{P_2}$, där

y_{P_1} löser $y'' + 9y = \cos 3x$

och y_{P_2} löser $y'' + 9y = 9x^2$.

Bestäm y_{P_1}: Enligt förra exemplet, $y_{P_1} = \frac{x}{6}\sin 3x$

Bestäm y_{P_2}: $y'' + 9y = 9x^2$. Sätt $y = Ax^2 + Bx + C$.

Vi får $y' = 2Ax + B$, $y'' = 2A$, och

$$2A + 9(Ax^2 + Bx + C) = 9x^2$$

$$\iff 9Ax^2 + 9Bx + (2A + 9C) = 9x^2$$

$$\iff \begin{cases} 9A = 9 \\ 9B = 0 \\ 2A + 9C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = -2/9 \end{cases}, \quad y_{P_2} = x^2 - \frac{2}{9}$$

Svar: $y_P = y_{P_1} + y_{P_2} = \dfrac{x}{6}\sin 3x + x^2 - \dfrac{2}{9}$.

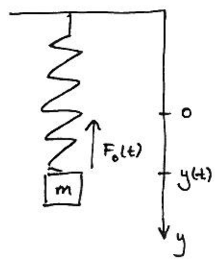
(4)

Ex (harmonisk svängning):

massa $m = 1$ kg

fjäderkonstant $k = 9$ N/m

$F_0(t) = -ky(t)$



Newtons kraftekvation:

$$\underbrace{m \cdot a(t)}_{\text{acceleration}} = F_0(t) \iff m \cdot y''(t) = -ky(t)$$

$$\iff y''(t) = -\frac{k}{m}y(t) \iff y''(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0.$$

Med $m = 1$, $k = 9$ får vi diff. ekv.

$$\boxed{y'' + 9y = 0}$$

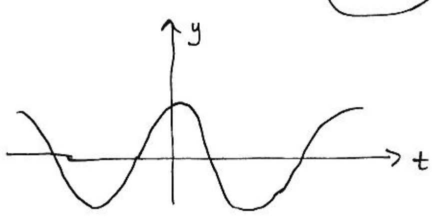
Denna homogena ekv. har vi löst tidigare:

$$y = A\cos 3t + B\sin 3t.$$

OBS! Hjälpvinkelmetoden ger att

$$y = \sqrt{A^2 + B^2}\,\sin(3t + \delta)$$

Fjädern svänger med egenfrekvens $\frac{3}{2\pi}$ (<u>vinkelfrekvens</u> 3)

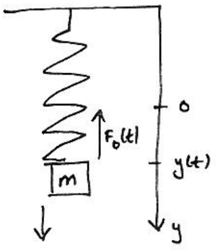


5

Vad skulle hända om den svängande kroppen skulle påverkas av en yttre kraft med samma frekvens?

Ex(igen):

Yttre kraft $F(t) = \cos 3t$



Ekvationen modifieras då till

$$m y''(t) = F(t) - k y(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y'' + 9y = \cos 3t}$$

Enligt tidigare exempel gäller då

$$y = y_h + y_p = A\cos 3t + B\sin 3t + \frac{t}{6}\sin 3t.$$

Antag nu att $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ (syst. stilla vid tid 0)

Detta ger $y(0) = A\cos 0 + B\sin 0 + 0 =$

$= A = 0$

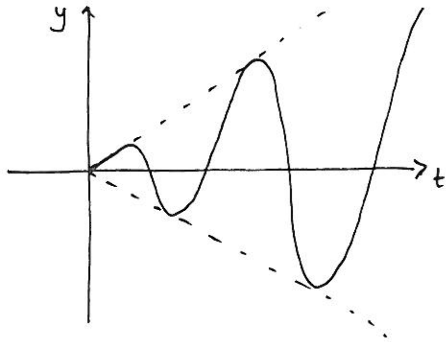
och då $y' = -3A\sin 3t + 3B\cos 3t + \frac{1}{6}\sin 3t + \frac{t}{2}\cos 3t$,

att $y'(0) = -3A\sin 0 + 3B\cos 0 + 0 + 0 =$

$= 3B = 0$

Slutsats: $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$, dvs. $\boxed{y = \frac{t}{6}\sin 3t}$

(6)



$y = \frac{t}{6}\sin 3t$

Resonans

Ekvationer av högre ordning:

Linjära ekvationer $\boxed{y = y_h + y_p}$

Ex: Lös ekvationen $y^{(6)} - y^{(5)} + 4y^{(4)} - 4y^{(3)} = -x$.

Bestäm y_h: Kar. ekv. $p(r) = r^6 - r^5 + 4r^4 - 4r^3 = 0$

$\Leftrightarrow r^3(r^3 - r^2 + 4r - 4) = 0 \Leftrightarrow r^3(r-1)(r^2+4) = 0$

Gissar rot $r = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r_{1,2,3} = 0 & \text{(trippelrot)} \\ r_4 = 1 & \text{eller} \\ r_{5,6} = \pm 2i & \text{eller} \end{cases}$

$r_{1,2,3} = 0$ ger termen $(C_1x^2 + C_2x + C_3)e^{0\cdot x}$ (= 1)

$r_4 = 1$ — " — De^x

$r_{5,6} = \pm 2i$ — " — $e^{0\cdot x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$ (= 1)

(7)

så $y_h = C_1x^2 + C_2x + C_3 + De^x + A\cos 2x + B\sin 2x$

Anm: Ekv. av ordning 6 ger 6 st konstanter!

Bestäm y_p: Högerled polynom av grad 1.

Koeff. framför y'', y' och y är 0.

Vi ansätter $y = (Ax+B)x^3 = Ax^4 + Bx^3$, och för

$y' = 4Ax^3 + 3Bx^2$, $y'' = 12Ax^2 + 6Bx$, $y^{(3)} = 24Ax + 6B$,

$y^{(4)} = 24A$, $y^{(5)} = y^{(6)} = 0$. Insättning i ekv. ger

$$0 - 0 + 4\cdot 24A - 4(24Ax + 6B) = -x$$

$$\Leftrightarrow \quad -96Ax + (96A - 24B) = -x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -96A = -1 \\ 96A - 24B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/96 \\ B = 1/24 \end{cases}$$

Alltså $y_p = \frac{1}{96}x^4 + \frac{1}{24}x^3$

Svar: $y = y_h + y_p = C_1x^2 + C_2x + C_3 + De^x + A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{96}x^4 + \frac{1}{24}x^3$ □

Anm:
Metoden fungerar även på linjära ekv. av första ordningen $y' + ay = h(x)$

Ex (Bakterieuppgiften – 3:e lösningsvariant) (8)

Lös ekv. $y' = ky \Leftrightarrow y' - ky = 0$!

Kar.ekv. $p(r) = r - k = 0 \Leftrightarrow r_1 = k$,

så lösningarna ges av $y = Ce^{kt}$.