Föreläsning 9

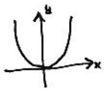
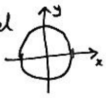
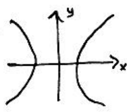
(1)

Kurvlängd:

Vad är en kurva?

Tidigare: Kurvor beskrivs av ekvationer, t.ex.

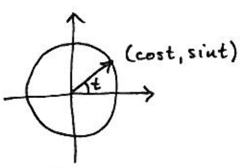
$y = x^2$ $x^2+y^2=1$ $x^2-y^2=1$

parabel  cirkel  hyperbel 

Nu: Ett annat sätt att beskriva kurvor är på parameterform.

Ex: Enhetscirkeln kan beskrivas på parameterform (exempelvis) genom

$$r(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{där} \quad \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, \; 0 \le t \le 2\pi$$



$\square$

Vi kan uppfatta $r(t)$ som en funktion av typen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, där $\mathbb{R}^2$ betecknar xy-planet. Variabeln t kallas parameter.

(2)

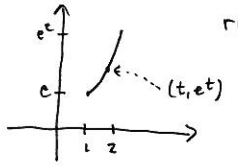
Anm: En kurva kan ges på parameterform på flera olika sätt. Exempelvis är även

$$r(t) = (x(t), y(t)) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad 0 \le t \le \pi,$$

en parameterframställning av enhetscirkeln.

Ex: Grafen till funktionen $f(x) = e^x$, $1 \le x \le 2$, kan beskrivas med parameterframställningen

$$r(t) = (x(t), y(t)) = (t, e^t), \quad 1 \le t \le 2.$$

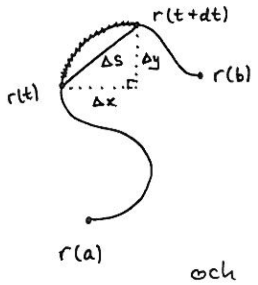


$\square$

Hur beräknar man längden av en kurva?

Vi studerar kurvan som ges av

$$r(t) = (x(t), y(t)), \quad a \le t \le b.$$



Låt dt vara ett litet (positivt) tal. Då är linjestycket Δs en god approximation av kurvbiten i figuren.

Vi ser att $\begin{cases} \Delta x = x(t+dt) - x(t) \\ \Delta y = y(t+dt) - y(t) \end{cases}$

och Pythagoras sats ger nu

(3)

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \left(\frac{(\Delta x)^2}{(dt)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(dt)^2}\right)(dt)^2 =$$

$$= \left(\left(\frac{\Delta x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{dt}\right)^2\right)(dt)^2,$$

dvs. $\Delta s = \underset{(-)}{+}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{dt}\right)^2} \cdot dt$.

Vidare är $\begin{cases} \dfrac{\Delta x}{dt} = \dfrac{x(t+dt) - x(t)}{dt} \approx x'(t) & \text{då } dt \text{ litet} \\ \dfrac{\Delta y}{dt} = \dfrac{y(t+dt) - y(t)}{dt} \approx y'(t) & \text{— " —} \end{cases}$

Slutsats: Det s.k. bågelementet

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

beskriver längden av en "oändligt liten" kurvbit.

Vi summerar nu alla sådana längder:

$$\boxed{\text{Kurvlängd} = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt}$$

Ex: Beräkna omkretsen av enhetscirkeln

$$(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Vi ser att $\begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \end{cases}$ och formeln ovan ger

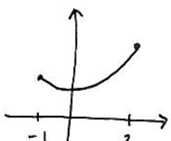
(4)

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}_{=\sin^2 t + \cos^2 t = 1}}\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \text{ l.e.}$$

Ex: Beräkna längden av grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \; (= \cosh x), \quad -1 \le x \le 2.$$

Lösning: En parameterframställning är $(x(t), y(t)) = \left(t, \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)$, $-1 \le t \le 2$.



Vi får $\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$ och

$$L = \int_{-1}^{2} \sqrt{1^2 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2}\, dt = \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + \frac{e^{2t} + e^{-2t} - 2}{4}}\, dt =$$

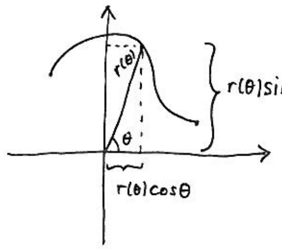
$$= \int_{-1}^{2} \sqrt{\frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4}}\, dt = \int_{-1}^{2} \sqrt{\frac{(e^t + e^{-t})^2}{4}}\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{2} \frac{e^t + e^{-t}}{2}\, dt = \left[\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2}(e^2 - e^{-2} - e^{-1} + e) \text{ l.e.}$$

Anm: Formeln för kurvlängd av funktionsgrafer blir

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$$

Kurvor med polära koordinater: (5)



$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$$a \le \theta \le b$$

Vi får $\begin{cases} x'(\theta) = r'(\theta)\cos\theta + r(\theta)(-\sin\theta) \\ y'(\theta) = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta \end{cases}$, och

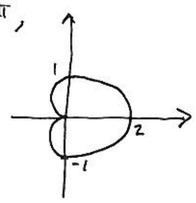
$$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = r'(\theta)^2\cos^2\theta + r(\theta)^2\sin^2\theta - \cancel{2r(\theta)r'(\theta)\sin\theta\cos\theta} +$$
$$+ r'(\theta)^2\sin^2\theta + r(\theta)^2\cos^2\theta + \cancel{2r(\theta)r'(\theta)\sin\theta\cos\theta} =$$
$$= r'(\theta)^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1} + r(\theta)^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1} = r'(\theta)^2 + r(\theta)^2$$

Således
$$L = \int_a^b \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\, d\theta = \int_a^b \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}\, d\theta$$

Ex: Beräkna längden av kurvan

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = r(\theta)\sin\theta \end{cases}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

där $r(\theta) = 1 + \cos\theta$



(6)

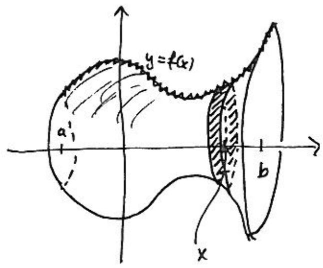
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (1+\cos\theta)^2}\, d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1} + 1 + 2\cos\theta}\, d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\tfrac{\theta}{2}}\, d\theta = \int_0^{2\pi} 2\left|\cos\tfrac{\theta}{2}\right| d\theta =$$

$\boxed{\cos\theta = \cos 2\cdot\tfrac{\theta}{2} = 2\cos^2\tfrac{\theta}{2} - 1}$

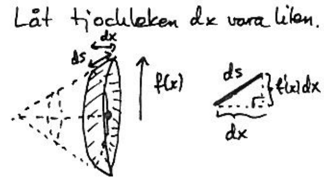
$$= \int_0^{\pi} 2\cos\tfrac{\theta}{2}\, d\theta - \int_{\pi}^{2\pi} 2\cos\tfrac{\theta}{2}\, d\theta = \left[4\sin\tfrac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} - \left[4\sin\tfrac{\theta}{2}\right]_{\pi}^{2\pi} =$$
$$= 8 \text{ l.e.} \qquad \Box$$

Area av rotationsytor

Betrakta rotationsytan genererad av $y = f(x)$, $a \le x \le b$. (Vi antar att $f(x) \ge 0$.) Beräkna ytans area!

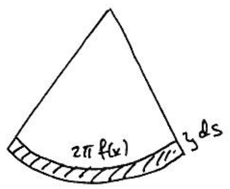


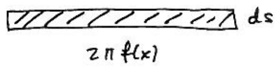
Skär ut "remsa" vid x! Låt tjockleken dx vara liten.



"stympad kon"

(7)





$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (f'(x)dx)^2} =$$
$$= \sqrt{(1 + f'(x)^2)(dx)^2} =$$
$$= \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

$$\text{Area(remsa)} \approx 2\pi f(x)\, ds = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

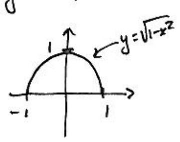
$$\boxed{\text{Area} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}$$

Ex: Vad är arean av enhetssfären (radie = 1)?

Lösning: Låt övre delen av enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ rotera kring x-axeln. $x^2 + y^2 = 1 \iff y = \pm\sqrt{1 - x^2}$

Sätt alltså $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \le x \le 1$.

Eftersom $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$ får vi



$$\text{Area} = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\cdot\sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{(1 - x^2)\left(1 + \frac{x^2}{1 - x^2}\right)}\, dx$$
$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2 + x^2}\, dx = 2\pi \int_{-1}^{1} 1\, dx = 4\pi \text{ a.e.}$$