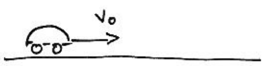
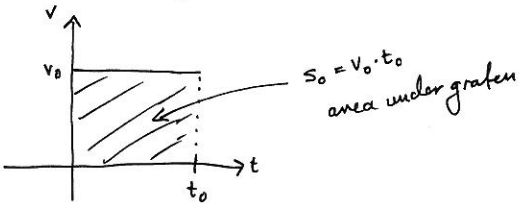
Föreläsning 4:

Integraler (introduktion):

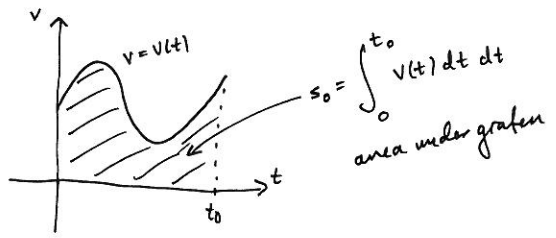


$$\boxed{\begin{array}{c}\text{sträcka} = \text{fart} \cdot \text{tid} \\ s = v \cdot t\end{array}}$$

Denna formel gäller vid konstant fart v_0.

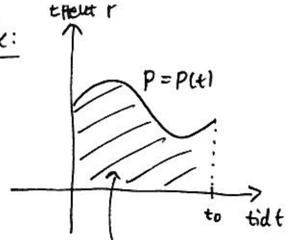


Vad gäller om farten v varierar, dvs. $v = v(t)$?

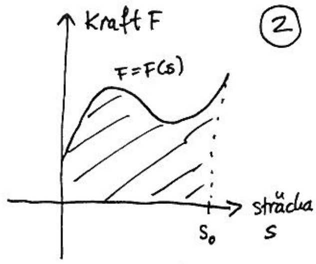


Önskan att bestämma "arean under grafen" dyker upp i diverse fysikaliska tillämpningar:

Ex:

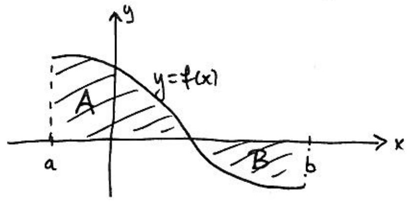


$$\text{Energi/arbete} = \int_0^{t_0} P(t)\,dt$$



$$\text{Arbete} = \int_0^{s_0} F(s)\,ds$$

Problem: Bestäm arean under grafen



Vi kommer att definiera integralen så att

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{area } A - \text{area } B,$$

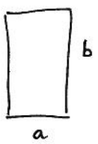
dvs. då funktionsgrafen ligger under x-axeln så räknas arean som negativ.

Anm: Vill vi uttrycka area A + area B med en integral, så kan vi skriva $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Vad menas med area?

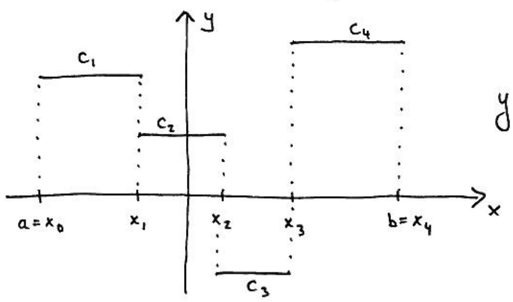
Vi definierar arean av en rektangel som

$$\text{Area} = a \cdot b$$



Det är därför lämpligt att börja med att införa integralen för funktioner vars graf har "rektangelform".

Ex: Funktionen $\Phi(x)$ med grafen

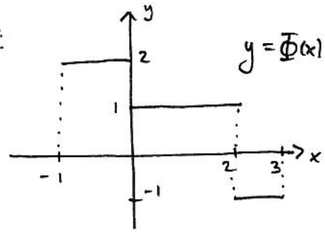


är ett exempel på en trappfunktion.

Def (Integral av en trappfunktion): Låt Φ vara en trappfunktion. Då definierar vi integralen

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1})$$

Ex:



$$\int_{-1}^{3} \Phi(x)\,dx = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 3$$

För integraler av trappfunktioner gäller följande:

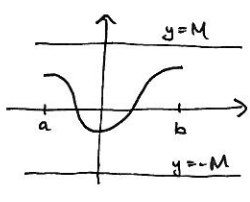
(1) $\displaystyle\int_a^b k\,\Phi(x)\,dx = k \int_a^b \Phi(x)\,dx$, k konstant

(2) $\displaystyle\int_a^b (\Phi(x) + \Psi(x))\,dx = \int_a^b \Phi(x)\,dx + \int_a^b \Psi(x)\,dx$

(3) Om $\Phi(x) \le \Psi(x)$, så gäller $\displaystyle\int_a^b \Phi(x)\,dx \le \int_a^b \Psi(x)\,dx$

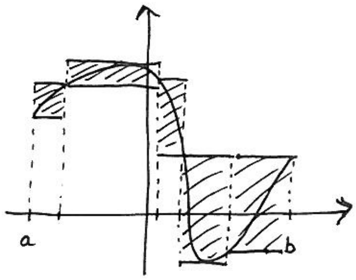
(4) $\displaystyle\int_a^b \Phi(x)\,dx = \int_a^c \Phi(x)\,dx + \int_c^b \Phi(x)\,dx$, om $a \le c \le b$.

Vi utvidgar nu definitionen av integral till en större klass av funktioner – begränsade funktioner.



$$|f(x)| \le M, \quad a \le x \le b$$

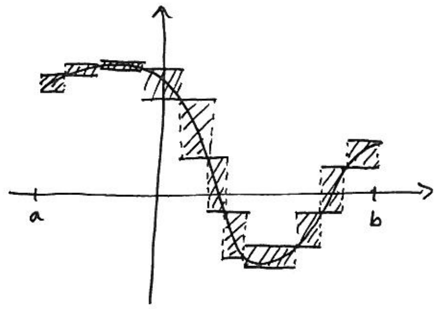
Strategin är att försöka approximera $f(x)$ med trappfunktioner "under" & "över": (5)



$\Phi_ö(x)$ trappfunktion "över" $f(x)$

$\Phi_u(x)$ trappfunktion "under" $f(x)$

Denna strategi borde fungera om den streckade arean kan göras godtyckligt liten genom att välja $\Phi_u(x)$ och $\Phi_ö(x)$ på ett "smart" sätt:



Klart att $\int_a^b \Phi_u(x)\,dx \le$ arean under $f(x) \le \int_a^b \Phi_ö(x)\,dx$

Vi kan nu definiera integralen på följande sätt:

(6)

Def (Riemannintegrerbar): En begränsad funktion f definierad i $[a,b]$ sägs vara (Riemann-)integrerbar om det för varje $\varepsilon > 0$ finns trappfunktioner $\Phi_u(x) \le f(x) \le \Phi_ö(x)$ sådana att

$$\int_a^b \Phi_ö(x)\,dx - \int_a^b \Phi_u(x)\,dx < \varepsilon,$$

dvs. arean mellan trappfunktionerna kan göras godtyckligt liten.

Sats (utan bevis): Om f är integrerbar så finns ett tal λ (unikt bestämt) som uppfyller

$$\int_a^b \Phi_u(x)\,dx \le \lambda \le \int_a^b \Phi_ö(x)\,dx$$

för alla trappfunktioner $\Phi_u(x) \le f(x) \le \Phi_ö(x)$.

Vi definierar integralen $\int_a^b f(x)\,dx = \lambda$

Sats: Varje kontinuerlig funktion i $[a,b]$ är integrerbar.

Bevis: Hoppas över.

(7)

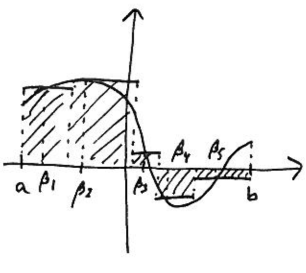
- Man kan nu visa att räknelagarna ovan för trappfunktioner också gäller för integrerbara funktioner.

Def: Vi definierar

$$\int_a^c f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx \quad \text{för } c<a.$$

Anm: Räknelag (4) gäller även då $c<a$ eller $c>b$.

Riemannsummor:



1) Gör en intervallindelning D av intervallet $[a,b]$

2) Välj valfri punkt β_k i varje delintervall

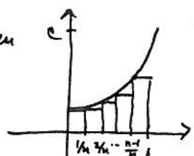
Arean under denna trappfunktion kallas för Riemannsumman R_D.

Sats: $R_D \to \int_a^b f(x)\,dx$ då intervallindelningen D blir "obegränsat förfinad" (f är kontinuerlig)

Ex: Beräkna integralen $\int_0^1 e^x\,dx$!

(8)

Lösning: Låt $n \ge 1$ heltal. Gör indelningen



$$D_n: \; 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$$

av integrationsintervallet $[0,1]$

Välj $\beta_k = \frac{k-1}{n}$ i varje delintervall $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $1 \le k \le n$, dvs. vänster ändpunkt. Vi får då Riemannsumman

$$R_{D_n} = f(\beta_1)\cdot\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{intervallängd } 1/n} + f(\beta_2)\cdot\frac{1}{n} + \dots + f(\beta_n)\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\beta_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k-1}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(e^{1/n})^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}(e^{1/n})^k}_{\text{geom. summa}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{(e^{1/n})^n - 1}{e^{1/n}-1} = \frac{1}{n}\cdot\frac{e-1}{e^{1/n}-1}.$$

Låter vi $n \to \infty$ får vi

$$R_{D_n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{e-1}{e^{1/n}-1} = \left[\begin{matrix} m = 1/n \\ n\to\infty \Rightarrow m \to 0\end{matrix}\right] = m\cdot\frac{e-1}{e^m-1} =$$

$$= \frac{e-1}{\underbrace{\frac{e^m-1}{m}}_{\to 1}} \to e-1 \quad \text{då } m \to 0$$

Låter vi $n \to \infty$ blir dessutom intervallindelningen obegränsat förfinad då intervallängden $1/n \to 0$, och sats ovan ger att

$$\int_0^1 e^x\,dx = e-1.$$