

Föreläsning 11

①

Separabla differentialekvationer

Diff. ekvationer av typen

$$y'(x) \cdot f(y(x)) = g(x) \text{ kallas separabla.}$$

Exempel är

$$y'(x) \cdot e^{2y(x)} = x, \quad y'(x) \cdot \frac{1}{y(x)} = x^2 + 2, \dots$$

Låt F och G vara primitiva funktioner till f respektive g . Vi får då

$$y'(x) \cdot f(y(x)) = g(x) \xrightarrow{\text{kedjeregeln "ballänges"}} \frac{d}{dx} (F(y(x))) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow F(y(x)) = G(x) + C$$

Ofta kan vi nu lösa ut $y(x)$ som funktion av x .

Ex: Lös diff. ekvationen $y'(x) \cdot e^{2y(x)} = x$! (*)

$$\text{Vi har } f(y) = e^{2y} \text{ och } g(x) = x \Rightarrow$$

$$F(y) = \frac{1}{2} e^{2y} \text{ och } G(x) = \frac{x^2}{2}. \text{ Vi får}$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} e^{2y(x)} \right) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2} e^{2y(x)} = \frac{x^2}{2} + C$$

Ytterligare hur lång tid tar det för soppan att svalna ③ till 35°C ?

Lösning: $y(t)$ = soppans temp. i $^\circ\text{C}$ vid tid t min.

$$\text{Newtons avsvåningslag: } \boxed{y'(t) = -k(y(t) - 20)}$$

← separabel

$$\frac{y'}{y-20} = -k \quad (y \neq 20)$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y-20} dy = \int -k dt$$

$$\Leftrightarrow \ln|y-20| = -kt + C \Leftrightarrow |y-20| = e^{-kt+C}$$

$$\Leftrightarrow y-20 = \pm e^{-kt+C} \Leftrightarrow y = 20 + D e^{-kt} \quad (D = \pm e^C)$$

$$t=0: y(0) = 20 + D = 90 \Leftrightarrow D = 70$$

$$\text{vilket ger } y = 20 + 70e^{-kt}$$

$$t=10: y(10) = 20 + 70e^{-10k} = 60$$

$$\Leftrightarrow e^{-10k} = \frac{4}{7} \Leftrightarrow -10k = \ln \frac{4}{7}$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{10} \ln \frac{4}{7} = \frac{1}{10} \ln \frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow e^{2y(x)} = x^2 + 2C \Leftrightarrow 2y(x) = \ln(x^2 + 2C) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2C) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + D), \text{ där } D = 2C. \quad \square$$

Mnnesregel: Skriv $y' = \frac{dy}{dx}$, dvs.

$$y' \cdot e^{2y} = x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} e^{2y} = x \Leftrightarrow e^{2y} dy = x dx$$

Sätt integraltecken framför!

$$\int e^{2y} dy = \int x dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} e^{2y} = \frac{x^2}{2} + C \text{ osv.}$$

Anm: Balsterieuppgiften från förel. 13 kan även lösas med den "separabla metoden":

$$y' = k \cdot y \xrightarrow{(y \neq 0)} y' \cdot \frac{1}{y} = k \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int k dt$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = kt + C \Leftrightarrow |y| = e^{kt+C} \Leftrightarrow$$

$$y = \pm e^{kt+C} = \pm e^C \cdot e^{kt} = D e^{kt} \quad (D = \pm e^C)$$

(OBS! Även $y=0$ är en lösning.)

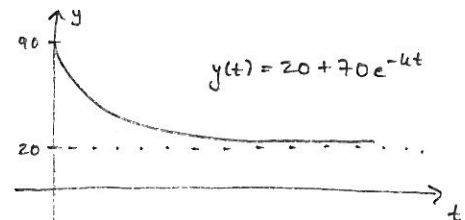
Ex: En varm soppa kyls ner från 90°C till 60°C efter 10 min. i ett rum med temperatur 20°C . Nedkylningen kan beskrivas med Newtons avsvåningslag, som säger att avsvåningshastigheten är proportionell mot temperaturskillnaden mellan objektet och omgivningen.

$$y(t) = 35: \quad y(t) = 20 + 70e^{-\frac{t}{10} \ln \frac{7}{4}} = 35 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{10} \ln \frac{7}{4}} = \frac{15}{70} \Leftrightarrow -\frac{t}{10} \ln \frac{7}{4} = \ln \frac{3}{14}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln \frac{3}{14}}{-\frac{1}{10} \ln \frac{7}{4}} = \frac{10 \ln \frac{14}{3}}{\ln \frac{7}{4}} \approx 27.5 \text{ min}$$

Svar: Ytterligare ca 17.5 min.



Anm: Kan även lösas med integrerande faktor.

Integralkvationer:

$$\text{Analytisk kursats: } \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

Ex: Bestäm alla kontinuerliga funktioner $y(x)$ som uppfyller $y(x) = 5 + \int_0^x \frac{1}{1+t^2} y(t) dt$.

$$\text{Ledvis derivering: } y'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \frac{1}{1+t^2} y(t) dt \right)$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = \frac{1}{1+x^2} y(x) \text{ Differential ekvation!}$$

Kan lösas på två sätt:

(5)

$$I) y' = \frac{1}{1+x^2} y \Leftrightarrow y' - \frac{1}{1+x^2} y = 0 \quad (*)$$

$$g(x) = -\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow G(x) = -\arctan x \Rightarrow e^{G(x)} = e^{-\arctan x}$$

$$(*) \Leftrightarrow e^{-\arctan x} y' - e^{-\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2} y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} (e^{-\arctan x} \cdot y) = 0 \Leftrightarrow e^{-\arctan x} \cdot y = C$$

$$\Leftrightarrow y = C e^{\arctan x}$$

$$II) y' = \frac{1}{1+x^2} y \Leftrightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{1+x^2} \quad (y \neq 0)$$

$$\text{Detta ger } \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \arctan x + C \Leftrightarrow |y| = e^{\arctan x + C}$$

$$\Leftrightarrow y = D e^{\arctan x} \quad (D = \pm e^C, \text{ även } D=0 \text{ tillåtet})$$

Vi bestämmer konstanten!

$$y(0) = 5 + \underbrace{\int_0^0 \frac{1}{1+t^2} y(t) dt}_{=0} = 5$$

$$\text{och } y(0) = C e^{\arctan 0} = C e^0 = C = 5 \quad \text{Svar: } y(x) = 5e^{\arctan x}$$

$$(1) \text{ ger att } H(x) = H_0, \text{ och}$$

$$(2) \text{ ger att } V(x) = \rho g s(x) - V_0.$$

$$\text{Vi får } y'(x) = \frac{V(x)}{H(x)} = \frac{\rho g s(x) - V_0}{H_0} = \frac{\rho g}{H_0} s(x) - \frac{V_0}{H_0}.$$

Vi får en integralrelation:

$$y'(x) = -\frac{V_0}{H_0} + \frac{\rho g}{H_0} \int_0^x \sqrt{1+y(t)^2} dt$$

$$\text{Vi kallar } \frac{\rho g}{H_0} = a, \quad -\frac{V_0}{H_0} = b \text{ och } y'(x) = u(x).$$

$$\text{Detta ger } u(x) = b + a \int_0^x \sqrt{1+u(t)^2} dt$$

Ledvis derivering: $u'(x) = a \sqrt{1+u(x)^2}$ separabel!

$$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} = a \Leftrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = \int a dx$$

$$\Leftrightarrow \ln(u + \sqrt{1+u^2}) = a(x-c) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Vi kallar konstanten} \\ \text{för } -ac! \end{array} \right]$$

Vi löser ut u:

$$u + \sqrt{1+u^2} = e^{a(x-c)} \Leftrightarrow \sqrt{1+u^2} = e^{a(x-c)} - u$$

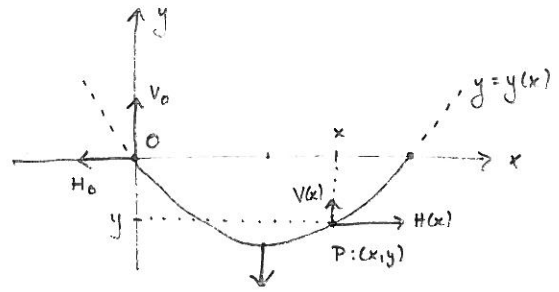
$$\Rightarrow 1+u^2 = e^{2a(x-c)} + u^2 - 2e^{a(x-c)} u$$

(\Leftrightarrow OBS!)

Ex (hängande snöre):

(Like svårare!)

(6)



Snöret OP är i mekanisk jämvikt!

$$\text{Tjungkraft: } m \cdot g = \rho \cdot s(x) \cdot g \quad (\rho \text{ massa/L.e.})$$

där $s(x)$ är snöret OP:s längd.

Antag att ~~snöret~~ snöret följer kurvan $y=y(x)$.

$$\text{Kurvlängd } s(x) = \int_0^x \sqrt{1+y'(t)^2} dt$$

Eftersom OP i mekanisk jämvikt gäller:

$$\begin{cases} -H_0 + H(x) = 0 & (1) \\ V_0 + V(x) - \rho g s(x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Kraften i P har tangentens riktning!

$$\text{Detta ger att } y'(x) = \frac{V(x)}{H(x)}.$$

$$\Leftrightarrow a^2 e^{a(x-c)} u = e^{2a(x-c)} - 1 \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{e^{a(x-c)} - e^{-a(x-c)}}{2}. \quad \text{Detta ger}$$

$$y' = \frac{e^{a(x-c)} - e^{-a(x-c)}}{2} \Leftrightarrow y = \int \frac{e^{a(x-c)} - e^{-a(x-c)}}{2} dx = \frac{1}{a} \frac{e^{a(x-c)} + e^{-a(x-c)}}{2} + D = \frac{1}{a} \cosh(a(x-c)) + D$$

$$y(x) = \frac{1}{a} \cosh(a(x-c)) + D$$

(8)