

Föreläsning 6

①

Insättningsformeln:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \left(= [F(x)]_a^b \right)$$

Partialintegration och variabelbyte

Ex 1: Beräkna $\int_1^e x \ln x dx$.

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Nu får vi

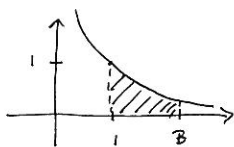
$$\int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{e^2}{4} - \left(\frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$$

Alt. $\int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1}{2} \ln 1 - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$ □

Nu: Obegränsade intervall (t.ex. $[a, \infty[$) och obegränsade funktioner $f(x)$. Detta kallas generaliserade integraler. ③

Obegränsat intervall:

Ex: Beräkna $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$.



Vi beräknar $\int_1^B \frac{1}{x^2} dx$.

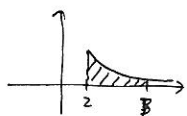
$$\int_1^B \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^B = -\frac{1}{B} + 1.$$

Detta ger

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^B \frac{1}{x^2} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{B} + 1 \right) = 1$$

Svar: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$.

Ex: Beräkna $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx$.



Vi beräknar först $\int_2^B \frac{1}{x \ln x} dx$:

$$\int_2^B \frac{1}{x \ln x} dx = \int_2^B \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} dx = \left[\ln |\ln x| \right]_2^B = \ln |\ln B| - \ln |\ln 2| \rightarrow \infty \text{ då } B \rightarrow \infty \text{ Problem?}$$

Ex(ii): Beräkna $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$. ②

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[t = e^x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \right] =$$

$$= \int \frac{1}{1+t} dt = \ln |1+t| + C = \ln(1+e^x) + C$$

Detta ger $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[\ln(1+e^x) \right]_0^1 =$

$$= \ln(1+e) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

Alt. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[t = e^x, dt = e^x dx \right. \\ \left. \begin{matrix} x=0 \text{ ger } t=e^0=1 \\ x=1 \text{ ger } t=e^1=e \end{matrix} \right] =$

$$= \int_1^e \frac{1}{1+t} dt = \left[\ln |1+t| \right]_1^e = \ln(1+e) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) \text{ D.}$$

Observation: Insättning i formeln kan ske samtidigt med partialintegration/variabelbyte.

Generaliserade integraler:

Hittills: Integraler på begränsade intervall $[a, b]$ och begränsade funktioner $f(x)$.

Def: Om gränsvärdet $\lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f(x) dx (= E)$ ④

existerar (ändligt) sägs den generaliserade integralen

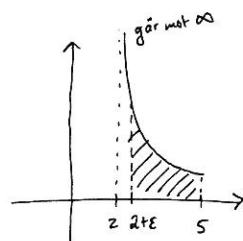
$\int_a^\infty f(x) dx$ vara konvergent med värdet E .

Annas sägs integralen vara divergent.

Annu: På motsv. sätt: $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x) dx$.

Obegränsad funktion:

Ex: $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$.



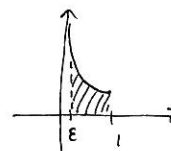
Vi beräknar $\int_{2+\epsilon}^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$:

$$\int_{2+\epsilon}^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = \left[2\sqrt{x-2} \right]_{2+\epsilon}^5 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{\epsilon} \rightarrow 2\sqrt{3} \text{ då } \epsilon \rightarrow 0^+$$

så $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = 2\sqrt{3}$ (konvergent)

Ex: $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$.

Vi beräknar $\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^2} dx$.

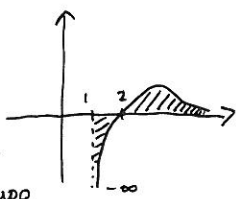


$$\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{\epsilon}^1 = -1 + \frac{1}{\epsilon} \rightarrow \infty \text{ då } \epsilon \rightarrow 0^+, \quad (5)$$

dvs. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ är divergent.

Integraler generaliserade på flera sätt:

Ex: $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x-1)}{x^2} dx$



Denna är generaliserad både i 1 och ∞ . Vi delar därför upp integralen i två delar:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x-1)}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{\ln(x-1)}{x^2} dx + \int_2^{\infty} \frac{\ln(x-1)}{x^2} dx$$

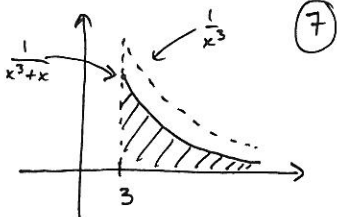
Integralen är konvergent om båda integralerna i högerledet är konvergenta (och divergent annars).

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x-1)}{x^2} dx &= -\frac{1}{x} \ln(x-1) + \int \frac{1}{x(x-1)} dx = \\ &= -\frac{1}{x} \ln(x-1) + \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = -\frac{1}{x} \ln(x-1) + \\ &+ \ln|x-1| - \ln|x| + C = -\frac{1}{x} \ln(x-1) + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C \end{aligned}$$

Detta ger

$$\int_2^B \frac{\ln(x-1)}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \ln(x-1) + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| \right]_2^B$$

Integralen går att räkna ut, men eftersom det innebär lite arbete ska vi försöka avgöra om den är konvergent utan att räkna ut den!



För stora x gäller $\frac{1}{x^3+x} \approx \frac{1}{x^3}$.

$$\int_3^B \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_3^B = \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{B^2} + \frac{1}{18} \right) \rightarrow \frac{1}{18}, B \rightarrow \infty$$

så $\int_3^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$ konvergent! Vi ser nu att

$$0 \leq \frac{1}{x^3+x} \leq \frac{1}{x^3} \text{ då } x \geq 3 \text{ (se figur!)}$$

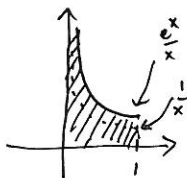
$$\text{Då gäller även } 0 \leq \int_3^{\infty} \frac{1}{x^3+x} dx \leq \int_3^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{18}$$

och det följer att även $\int_3^{\infty} \frac{1}{x^3+x} dx$ konvergent.

Svar: Ja.

Ex: Är $\int_0^1 \frac{e^x}{x} dx$ konvergent?

Denna är däremot svår att räkna ut. Här måste vi försöka argumentera som ovan. Denna är generaliserad i $x=0$.



$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{B} \ln(B-1) + \ln \left| \frac{B-1}{B} \right| + \frac{1}{2} \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = \\ &= -\frac{\ln(B-1)}{B} + \ln \left| 1 - \frac{1}{B} \right| + \ln 2 \xrightarrow{B \rightarrow \infty} \ln 2 \text{ då } B \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (6)$$

$$*) \frac{\ln(B-1)}{B} = \frac{\ln(B-1)}{B-1} \cdot \frac{B-1}{B} = \frac{\ln(B-1)}{B-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{B} \right) \rightarrow 0 \text{ då } B \rightarrow \infty$$

$$\text{Vidare } \int_{1+\epsilon}^2 \frac{\ln(x-1)}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \ln(x-1) + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| \right]_{1+\epsilon}^2 =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln 1 + \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{1+\epsilon} \ln \epsilon - \ln \left| \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \right| =$$

$$= -\ln 2 + \left(\frac{1}{1+\epsilon} - 1 \right) \ln \epsilon + \ln(1+\epsilon) =$$

$$= -\ln 2 - \frac{\epsilon \ln \epsilon}{\epsilon+1} + \ln(1+\epsilon) \rightarrow -\ln 2 \text{ då } \epsilon \rightarrow 0^+$$

Alltså

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x-1)}{x^2} dx = -\ln 2 + \ln 2 = 0 \quad (!) \text{ konvergent!}$$

Jämförelsesatser:

Ex: Är den generaliserade integralen $\int_3^{\infty} \frac{1}{x^3+x} dx$ konvergent?

För små x (x nära 0) gäller $\frac{e^x}{x} \approx \frac{1}{x}$. (8)

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x| \right]_{\epsilon}^1 = \ln 1 - \ln \epsilon \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0^+$$

så $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ divergent. Vi ser att

$$0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{e^x}{x} \text{ då } x > 0. \text{ Då gäller}$$

$$("=\infty") \int_0^1 \frac{1}{x} dx \leq \int_0^1 \frac{e^x}{x} dx, \text{ dvs. även}$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x} dx \text{ är divergent. Svar: Nej.}$$

Sats (Jämförelsesats): ($a, b = \pm \infty$ tillåtet)

Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ för alla x i integrationsinterv. så

a) $\int_a^b g(x) dx$ konv. $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ konv.

b) $\int_a^b f(x) dx$ div. $\Rightarrow \int_a^b g(x) dx$ div.

Standardjämförelseintegraler

• $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ konvergent $\Leftrightarrow \alpha > 1$

• $\int_0^b \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ konvergent $\Leftrightarrow \alpha < 1$