Föreläsning 3:

1

Förra föreläsningen lärde vi oss att beräkna

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx, \qquad f(x), g(x) \text{ polynom.}$$

Strategi: Försök överföra problem till problem med rationell funktion.

Ex:
$$\int \frac{3}{e^x+4}\,dx = \left[\begin{array}{l} t=e^x \iff x=\ln t \\ \frac{dx}{dt}=\frac{1}{t} \implies dx=\frac{1}{t}\,dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{3}{t(t+4)}\,dt \overset{*)}{=} \frac{3}{4}\int \frac{1}{t}-\frac{1}{t+4}\,dt =$$

rationell funktion!

$$= \frac{3}{4}\left(\ln|t|-\ln|t+4|\right)+C = \frac{3}{4}\left(x-\ln(e^x+4)\right)+C$$

*)
$$\frac{3}{t(t+4)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t+4} \iff$$
$$3 = A(t+4)+Bt \iff 3=(A+B)t+4A$$
$$\iff \begin{cases} A+B=0 \\ 4A=3 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{3}{4} \\ B=-\frac{3}{4} \end{cases}$$
□

Ex: $(x>1)$
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx = \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{x-1} \iff x=t^2+1\ (t>0) \\ \frac{dx}{dt}=2t \implies dx=2t\,dt \end{array}\right] =$$

2

$$= \int \frac{2t}{(t^2+1)t}\,dt = \int \frac{2}{t^2+1}\,dt =$$

rationell funktion

$$= 2\arctan t + C = 2\arctan(\sqrt{x-1})+C$$

Anm: Denna typ av substitution, dvs. $t=\sqrt{x+\alpha}$, fungerar för alla uttryck i $\sqrt{x+\alpha}$ (och x).

Standardprimitiver:
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}|+C \qquad \text{OBS!}$$

Ex:
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+4}}\,dx =$$
$$= \left[\begin{array}{l} t=x+1 \iff x=t-1 \\ \frac{dx}{dt}=1 \implies dx=dt \end{array}\right] = \int \frac{1}{\sqrt{t^2+4}}\,dt =$$
$$= \ln|t+\sqrt{t^2+4}|+C = \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}|+C$$

Ex:
$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{3\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}}\,dx =$$
$$= \left[\begin{array}{l} t=\frac{x}{3} \iff x=3t \\ dx=3\,dt \end{array}\right] = \int \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{1-t^2}}\,dt =$$

3

$$= \arcsin(t)+C = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)+C.$$

Ex:
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \int \frac{1}{2}\,\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\,2\cdot\sqrt{x^2+3}+C = \sqrt{x^2+3}+C$$

Alt. Sätt $t=x^2$ eller $t=x^2+3$.

Ex:
$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = ?$$

Vi provar först med $t=\sqrt{x^2+1}$. Detta ger $x^2+1=t^2$, dvs. $x=\pm\sqrt{t^2-1}$, och vi får $dx=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \int \frac{(t^2-1)+1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt =$$
$$= \int \sqrt{t^2-1}\,dt + \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

likasvår!

Ej så lyckat! Problemet är att vi har x i kvadrat i sambandet $x^2+1=t^2$.

Nytt försök: Vi sätter istället
$$t = x+\sqrt{x^2+1}.$$

Detta ger $t-x=\sqrt{x^2+1} \iff (t-x)^2=x^2+1 \quad (t>0)$

4

$$\iff t^2-2xt+\cancel{x^2}=\cancel{x^2}+1 \iff 2xt=t^2-1$$
$$\iff x=\frac{t^2-1}{2t}=\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}.$$

Vi får $dx=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2t^2}\right)dt=\left(\frac{t^2+1}{2t^2}\right)dt$ och slutligen $\sqrt{x^2+1}=t-x=t-\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}\right)=$

$$= \frac{t}{2}+\frac{1}{2t}=\frac{t^2+1}{2t}.$$

rat. funk.

Således
$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt =$$
$$= \int \frac{t^4+2t^2+1}{4t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\,dt =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}+2\ln|t|-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}\right)+C =$$
$$= \frac{1}{8}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+1}|-\frac{1}{8}\,\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}+C.$$

Anm: Primitiv till ett uttryck i $\sqrt{x^2+ax+b}$ (och x) kan alltid lösas med substitutionen
$$t = x+\sqrt{x^2+ax+b}.$$

Komplexvärda funktioner

Primitiv funktion kan även definieras för komplexvärda funktioner.

5

Ex: Vi vet att $De^{ix} = ie^{ix}$ ← inre derivata.

så $$\int e^{ix}\,dx = \frac{e^{ix}}{i} + C = \frac{(-i)}{(-i)}\cdot\frac{e^{ix}}{i} + C =$$

$$= -ie^{ix} + C.$$

Primitiver till trigonometriska uttryck:

Problem: Bestäm $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$ (dvs. primitiv till ett uttryck i $\sin x$, $\cos x$).

Ibland fungerar variabelbytet $t=\sin x$ eller $t=\cos x$:

Ex: $$\int \cos^3 x\,dx = \left[\begin{array}{l} t=\cos x \iff x=\arccos t \\ (0\le x\le \pi) \\ \frac{dx}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow dx = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \end{array}\right] =$$

$$= \int -\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,$$ variabelbytet $z=\sqrt{1-t^2}$ fungerar nu ......

Lättare är dock

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos x\,(1-\sin^2 x)\,dx = \left[\begin{array}{l} t=\sin x \\ \frac{dt}{dx}=\cos x,\ dt=\cos x\,dx \end{array}\right] =$$

$$= \int 1-t^2\,dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

6

Anm: Denna metod fungerar för udda potenser av $\sin x$ & $\cos x$.

Ibland kan man använda en trig. formel:

Ex: $$\int \cos^2 x\,dx \overset{*)}{=} \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\boxed{*)\quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \iff \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x}\ \square$$

Ett alternativ är att använda Eulers formler (fungerar för alla heltalspotenser):

Ex: $$\int \cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (e^{ix}+e^{-ix})^2\,dx = \frac{1}{4}\int e^{i2x} + e^{-i2x} + 2\,dx =$$

$$= \frac{1}{8i}e^{i2x} - \frac{1}{8i}e^{-i2x} + \frac{x}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i} + \frac{x}{2} + C = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} + C \quad \square$$

OBS! Svaret måste vara reellt.

7

Om inget annat fungerar, så kan man alltid använda variabelbytet $t = \tan\frac{x}{2}$:

Ex: Antag att vi vill beräkna $\int \frac{1}{\cos x}\,dx$.

Vi sätter $t=\tan\frac{x}{2}$, och får $x = 2\arctan t$ $(-\pi < x < \pi)$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Vidare $$\cos x = \cos 2\cdot\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\underbrace{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}_{=1}} \ \Big/\cos^2\tfrac{x}{2}\ =$$

$$= \frac{1-\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)^2}{1+\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)^2} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$ ← rat. funk.

Detta ger nu $$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2}{1-t^2}\,dt = \int \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\,dt =$$ ← p. bråkuppd.

$$= \ln|t+1| - \ln|t-1| + C = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{\tan(\frac{x}{2})+1}{\tan(\frac{x}{2})-1}\right| + C$$

8

Anm: Funktionen $\sin x$ kan vi uttrycka i t på följande sätt:

$$\sin x = \sin 2\cdot\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\underbrace{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}_{=1}} \ \Big/\cos^2\tfrac{x}{2}\ = \frac{2\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$