Föreläsning 10

(1)

Ex: En bakteriekultur växer med en hastighet som är proportionell mot antalet bakterier i kulturen. Antalet bakterier från början var $2 \cdot 10^5$, och 2 timmar senare hade kulturen vuxit till $5 \cdot 10^6$ celler. Ange en funktion som beskriver hur antalet bakterier beror av tiden.

Lösning: Vi vill bestämma en funktion

$y(t)$ = antalet bakterier efter tid t timmar.

Tillväxthast. proportionell mot antalet bakterier:

$$\boxed{y'(t) = k \cdot y(t)} \qquad k \text{ konstant}$$

En funktion som uppfyller detta samband är t.ex. $y(t) = e^{kt}$, ty $y'(t) = ke^{kt} = ky(t)$. Vi kan även multiplicera med en konstant C, ty

$$y(t) = Ce^{kt} \Rightarrow y'(t) = kCe^{kt} = ky(t).$$

Antag att den sökta funktionen är $y(t) = Ce^{kt}$.

Om vi sätter starttiden till $t=0$ får vi

$$y(0) = Ce^0 = C = 2 \cdot 10^5 \Rightarrow y(t) = 2 \cdot 10^5 \cdot e^{kt}$$

Anger vi tiden i timmar måste

$$y(2) = 2 \cdot 10^5 \cdot e^{2k} = 5 \cdot 10^6 \Leftrightarrow e^{2k} = \frac{5 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^5} = 25$$

(2)

$$\Leftrightarrow 2k = \ln 25 \Leftrightarrow k = \tfrac{1}{2}\ln 25 = \tfrac{1}{2}\ln 5^2 = \ln 5$$

Svar: En funktion ges av $y(t) = 2 \cdot 10^5 \cdot e^{t \ln 5} = 2 \cdot 10^5 \cdot 5^t$.

– Är detta den enda möjliga funktionen?

- Ekvationen $y'(t) = ky(t)$ är ett exempel på en differentialekvation.

Def (differentialekvation): En differentialekvation (i denna kursen) är en ekvation som innehåller en obekant funktion $y(x)$, dess derivator $y'(x), y''(x), \ldots$ samt uttryck i variabeln x.

Vi vill (oftast) bestämma $y(x)$.

Hur kan vi lösa differentialekvationer?

Enklaste fallet – "integrera" direkt!

Ex: Bestäm alla funktioner $y(x)$ som uppfyller

$$y'(x) = x^2 + 2 \quad !$$

$y(x)$ är primitiv funktion till högerledet:

$$y(x) = \int (x^2+2)\,dx = \frac{x^3}{3} + 2x + C$$

OBS! Oändligt många lösningar $(+C)$

(3)

Ex: Lös $y''(x) = \sin x$.

Vi får $y'(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x + C \Leftrightarrow$

$$y(x) = \int (-\cos x + C)\,dx = -\sin x + Cx + D$$

(C, D konstanter)

Ex: Lös $y'(x) \cdot \ln x + y(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2+1}, \quad x>0$

Här "råkar" vänsterledet kunna skrivas som en derivata av en produkt:

$$\frac{d}{dx}\left(y(x) \cdot \ln x\right) = \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow y(x) \cdot \ln x = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \arctan x + C \Leftrightarrow y(x) = \frac{\arctan x}{\ln x} + \frac{C}{\ln x}.$$

– Tur? – Nej, egentligen inte. Principen fungerar för alla ekvationer av typen

$$\boxed{y'(x) + g(x)y(x) = h(x)}$$

Linjära ekvationer av första ordningen

Ex: Lös $y'(x) + \sqrt{x}\,y(x) = \sqrt{x}, \quad x>0 \qquad (*)$

Vi ser att $g(x) = \sqrt{x}$. Gör nu på följande sätt:

– Bestäm en primitiv till $g(x)$: $G(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$

– Multiplicera ekv. $(*)$ ledvis med $e^{G(x)} = e^{\frac{2}{3}x^{3/2}}$.

(4)

Vi får

$$(*) \Leftrightarrow e^{\frac{2}{3}x^{3/2}} y'(x) + e^{\frac{2}{3}x^{3/2}} \sqrt{x}\, y(x) = e^{\frac{2}{3}x^{3/2}} \cdot \sqrt{x}$$

Vänsterledet är nu derivatan av en produkt!

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{2}{3}x^{3/2}} \cdot y(x)\right) = e^{\frac{2}{3}x^{3/2}} \cdot \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{2}{3}x^{3/2}} \cdot y(x) = \int e^{\frac{2}{3}x^{3/2}} \cdot \sqrt{x}\,dx = e^{\frac{2}{3}x^{3/2}} + C$$

inre derivata

Svar: $y(x) = 1 + Ce^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}, \quad x>0.$ $\square$

Faktorn $e^{G(x)} = e^{\frac{2}{3}x^{3/2}}$ kallas integrerande faktor. Ovanstående metod fungerar alltid på ekvationer av typen

$$y'(x) + g(x)y(x) = h(x) \qquad (*)$$

Bevis: Låt $G(x)$ vara primitiv till $g(x)$. Multiplicera ekv. $(*)$ ledvis med $e^{G(x)}$ $(\neq 0)$:

$$(*) \Leftrightarrow e^{G(x)}y'(x) + e^{G(x)}g(x)y(x) = e^{G(x)}h(x).$$

Vi ser att VL är derivatan av en produkt:

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{G(x)}y(x)\right) = e^{G(x)}h(x)$$

$$\Leftrightarrow e^{G(x)}y(x) = \int e^{G(x)}h(x)\,dx \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{e^{G(x)}}\int e^{G(x)}h(x)\,dx$$

$\square$

Anm: Ofta utelämnas x i $y(x)$.

Ex: Bestäm den lösning till

$$y' + \frac{1}{x} y = \sin x, \qquad x > 0, \qquad (*)$$

som uppfyller $y(\pi) = 1$.

Lösning: $g(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow G(x) = \ln|x| = \ln x \Rightarrow$

$$e^{G(x)} = e^{\ln x} = x, \quad (*) \Leftrightarrow x y' + y = x \sin x$$

$$\Leftrightarrow (x \cdot y)' = x \sin x \Leftrightarrow x \cdot y = \int x \sin x \, dx =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$\Leftrightarrow y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}. \quad \text{(allmän lösning)}$$

$$y(\pi) = 1 \Rightarrow 1 = \underbrace{-\cos\pi}_{-(-1)} + \frac{\overset{=0}{\sin\pi}}{\pi} + \frac{C}{\pi} \Leftrightarrow C = 0$$

Svar: $y = -\cos x + \dfrac{\sin x}{x}$ $\square$

Anm: Problemet ovan, med kravet $y(\pi) = 1$ på lösningen, kallas för ett begynnelsevärdesproblem

Vi har nu kommit så långt att vi kan lösa det inledande problemet med bakterier "på riktigt":

$$y'(t) = k y(t) \Leftrightarrow y'(t) - k y(t) = 0 \qquad (*)$$

$$g(t) = -k \Rightarrow G(t) = -kt \Rightarrow e^{G(t)} = e^{-kt}$$

$$(*) \Leftrightarrow e^{-kt} y'(t) - e^{-kt} k y(t) = e^{-kt} \cdot 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-kt} \cdot y(t)\right) = 0 \Leftrightarrow e^{-kt} \cdot y(t) = C$$

$\Leftrightarrow y(t) = Ce^{kt}$. Vi ser nu att den lösning vi "gissade" faktiskt var den enda möjliga.

Vi avslutar med ytterligare en tillämpning:

Ex: I början av 1980-talet (innan Montrealprotokollet) var det globala utsläppet av freon (CFC-12) i atmosfären $4.2 \cdot 10^8$ kg/år. Denna avlägsnas med hjälp av fotolys (fotoner) med en hastighet som i varje ögonblick är proportionell mot massan freon i atmosfären. Proportionalitetskonstanten är $k = 0.01$ år^{-1}. År 1980 fanns det $8.5 \cdot 10^9$ kg freon i atmosfären. Hur mycket fanns det (enligt denna modell) 1984?

Lösning: $m(t)$ = massa freon i kg vid tid t år

$$\boxed{m'(t) = 4.2 \cdot 10^8 - 0.01 m(t)}$$

$$\Leftrightarrow m' + 0.01 m = 4.2 \cdot 10^8 \qquad (*)$$

$$g(t) = 0.01 \Rightarrow G(t) = 0.01t \Rightarrow e^{G(t)} = e^{0.01t}$$

$$(*) \Leftrightarrow e^{0.01t} m' + e^{0.01t} \cdot 0.01 m = e^{0.01t} \cdot 4.2 \cdot 10^8$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{0.01t} \cdot m\right) = e^{0.01t} \cdot 4.2 \cdot 10^8$$

$$\Leftrightarrow e^{0.01t} \cdot m = \int e^{0.01t} \cdot 4.2 \cdot 10^8 \, dt = \frac{4.2 \cdot 10^8}{0.01} e^{0.01t} + C =$$

$$= 4.2 \cdot 10^{10} e^{0.01t} + C \Leftrightarrow m(t) = 4.2 \cdot 10^{10} + Ce^{-0.01t}$$

1980: Sätt $t = 0$: $m(0) = 4.2 \cdot 10^{10} + Ce^0 = 8.5 \cdot 10^9$

$$\Leftrightarrow C = 8.5 \cdot 10^9 - 4.2 \cdot 10^{10} = -3.35 \cdot 10^{10}$$

Vi får då $m(t) = 4.2 \cdot 10^{10} - 3.35 \cdot 10^{10} e^{-0.01t}$

1984: Sätt $t = 4$: $m(4) = 4.2 \cdot 10^{10} - 3.35 \cdot 10^{10} e^{-0.04} \approx$

$$\approx 9.8 \cdot 10^9 \text{ kg}$$

Svar: ca $9.8 \cdot 10^9$ kg