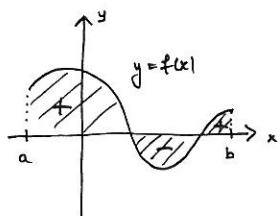


Föreläsning 5:

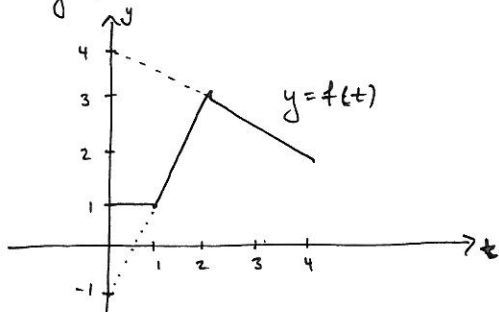
①



$\int_a^b f(x) dx = \text{area under grafen "med tecken"}$

Ex: Låt $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 2t-1 & 1 \leq t \leq 2 \\ -\frac{1}{2}t+4 & 2 \leq t \leq 4 \end{cases}$

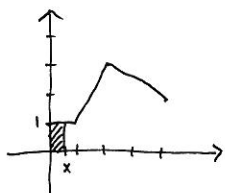
Vi ritar grafen!



Beräkna $\int_0^x f(t) dt$ för olika värden på x ($0 \leq x \leq 4$).

$0 \leq x \leq 1$:

$$\int_0^x f(t) dt = x \cdot 1 = x$$



$$\Rightarrow \int_0^x f(t) dt = 3 + 2(x-2) - 3 + 2x - \frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$$

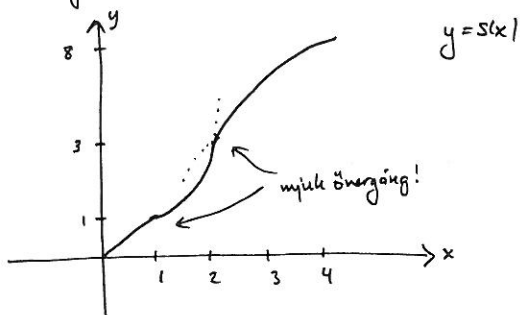
③

Sammanfattningsvis får vi nu

$$S(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - x + 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + 4x - 4 & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Detta är alltså en funktion av x !

Vi ritar grafen för funktionen $S(x)$:

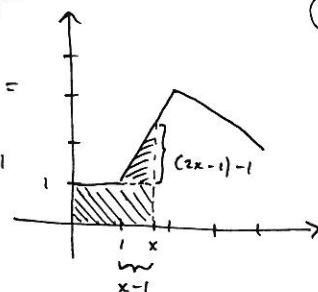


Vad händer om vi deriverar $S(x)$?

$$S'(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & 1 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x+4 & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$1 \leq x \leq 2$: rektangel + triangel

$$\int_0^x f(t) dt = x \cdot 1 + \frac{(x-1)((2x-1)-1)}{2} = x + x^2 - 2x + 1 = x^2 - x + 1$$

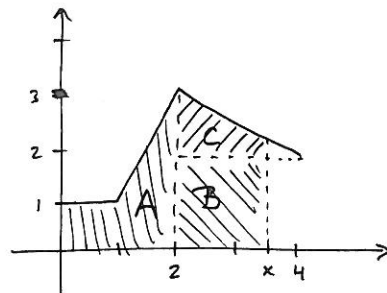


②

$2 \leq x \leq 4$:

$$\int_0^x f(t) dt = \text{area A} + \text{area B} + \text{area C}$$

Nu ser vi att följande gäller



$$\text{area A} = \int_0^2 f(t) dt = 2^2 - 2 + 1 = 3 \quad (\text{enligt formel ovan})$$

$$\text{area B} = 2(x-2) \quad (\text{area av rektangel})$$

$$\text{area C} = \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{(4-x)((-\frac{1}{2}x+4)-2)}{2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{4}(4-x)^2 = -3 + 2x - \frac{1}{4}x^2$$

(area av triangel - area av topptriangel)

Alltså $S'(x) = f(x)$!

④

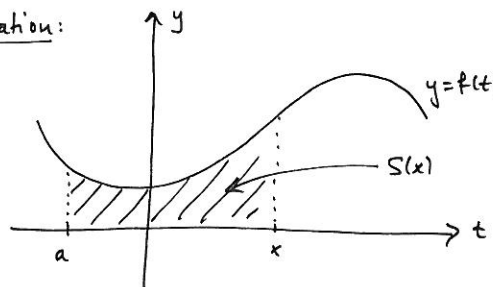
Sats (Analysens huvudsats):

Antag att f är kontinuerlig på intervallet I och att $a \in I$. Funktionen

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in I,$$

är då deriverbar med derivatan $S'(x) = f(x)$. Med andra ord, S är en primitiv funktion till f .

Illustration:



Observera att S är en funktion av x !

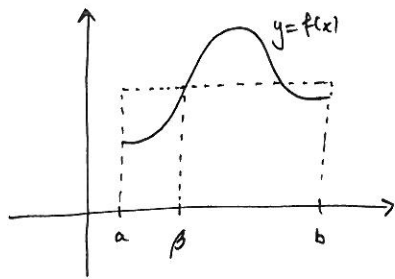
Innan vi kan visa analysens huvudsats behöver vi följande sats (som vi inte bryr oss om att visa):

Sats (Integralkalkylens medelvärdesats):

Antag att f är kontinuerlig på $[a,b]$. Då finns (minst) en punkt β ($a \leq \beta \leq b$) sådan att

$$f(\beta)(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

Illustration:



(5)

Verkar rimligt att det finns ett tal β sådant att

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{f(\beta)(b-a)}_{\text{arean av rektangeln}}$$

Bevis (analysens midsats):

Vi vill beräkna $S'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h}$.

$$\begin{aligned} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt, \text{ där } \int_x^{x+h} f(t) dt \text{ är markerat i figuren.} \end{aligned}$$

Euligt integralkalkylens medelvärdesats gäller nu att $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \frac{1}{h} f(\beta) \underbrace{(x+h-x)}_{=h} = f(\beta)$

Euligt analysens midsats gäller $g'(y) = \sin y$. (7)

Kedjeregeln ger nu

$$f'(x) = g'(x^2) \cdot 2x = \sin(x^2) \cdot 2x$$

↑
inre derivata

Sats (insättningsformeln): Antag att f är kontinuerlig på intervallet I , och att F där är en primitiv funktion till f . Då är

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

för $a, b \in I$.

(Viktig!)

Bevis: Euligt analysens midsats gäller att

$S(x) = \int_a^x f(t) dt$ är en primitiv funktion till $f(x)$, och det är även $F(x)$ euligt förutsättning. Två primitiva skiljer sig åt med en konstant $\Rightarrow S(x) = F(x) + C$.

Men $S(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 \Rightarrow 0 = S(a) = F(a) + C$

$\Rightarrow C = -F(a)$. Detta betyder att $S(x) = F(x) - F(a)$.

Vi får nu

$$S(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \quad \square$$

för något β mellan x och $x+h$. Nu gäller att (6)

$h \rightarrow 0 \Rightarrow \beta \rightarrow x \Rightarrow f(\beta) \rightarrow f(x)$ eftersom f är kontinuerlig i x euligt förutsättning.

Sammantfattningsvis har vi visat att

$$S'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x). \quad \square$$

Ex: $S(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$ är en primitiv funktion till $f(x) = e^{-x^2}$, ty

$$S'(x) = \frac{d}{dx} \int_1^x e^{-t^2} dt = e^{-x^2} \text{ euligt analysens midsats.}$$

Anm: En primitiv funktion till $f(x) = e^{-x^2}$ kan ej uttryckas på något annat sätt i elementära funktioner.

Ex: Derivera $f(x) = \int_1^{x^2} \sin t dt$.

Detta är faktiskt en sammansatt funktion (fast det kan vara lite svårare att se), så vi kan använda kedje-regeln:

Sätt $g(y) = \int_1^y \sin t dt$. Då är $f(x) = g(x^2)$.

Anm: Vi använder beteckningen (8)

$$\left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ex: Förra föreläsningen beräknade vi

$$\int_0^1 e^x dx$$

med hjälp av Riemannsommor. Nu kan vi göra det på ett mycket enklare sätt med hjälp av insättningsformeln:

$$\int_0^1 e^x dx = \left[e^x \right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$