Föreläsning 13

1

Linjär ekvation av andra ordningen:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x).$$

Vad betyder linjär?

Antag att vi har två linjära ekvationer

$$y''+a(x)y'+b(x)y = h_1(x), \quad y''+a(x)y'+b(x)y = h_2(x),$$

med samma vänsterled, men olika högerled. Antag vidare att y_1 är lösning till den första och y_2 lösning till den andra. Då är $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ (λ_1, λ_2 tal) lösning till ekv.

$$y''+a(x)y'+b(x)y = \lambda_1 h_1(x) + \lambda_2 h_2(x). \quad (*)$$

Bevis: Sätt in $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ i vänsterledet i (*):

$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)'' + a(x)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' + b(x)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) =$$

$$= \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2'' + a(x)\lambda_1 y_1' + a(x)\lambda_2 y_2' + b(x)\lambda_1 y_1 + b(x)\lambda_2 y_2 =$$

$$= \lambda_1 \underbrace{(y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1)}_{=h_1(x)} + \lambda_2 \underbrace{(y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2)}_{=h_2(x)} =$$

$$= \lambda_1 h_1(x) + \lambda_2 h_2(x). \quad \square$$

2

Ex: Eftersom $y_1 = -\frac{x}{6}\cos 3x$ och $y_2 = \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{27}$ löser ekv.

$$y'' + 9y = \sin 3x \quad \text{resp.} \quad y'' + 9y = 3x^2 - 1 \quad \text{(kolla!)}$$

följer det att $y = y_1 + y_2 = -\frac{x}{6}\cos 3x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{27}$ löser ekv.

$$y'' + 9y = \sin 3x + 3x^2 - 1 \quad \square$$

Sats: Antag att y_p är en lösning till ekvationen

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x). \quad (*)$$

Då ges samtliga lösningar till (*) av

$$y = y_h + y_p,$$

där y_h betecknar alla lösningar till motsvarande homogena ekvation $y''+a(x)y'+b(x)y = 0$. (*')

Bevis: Låt y vara en godtycklig lösning till (*). Eftersom även y_p är en lösning till (*) följer det av linjäriteten att $y - y_p = y + (-1)y_p$ löser ekv.

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x) + (-1)h(x) = 0,$$

dvs. motsv. homogena ekvation (*'). Med beteckningen $y_h = y - y_p$ får vi $y = y_h + y_p$.

Omvänt, om y_h löser (*') och y_p löser (*), så kommer $y = y_h + y_p$ att lösa

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 + h(x) = h(x), \text{ dvs. } (*). \quad \square$$

3

Anm: En lösning y_p till (*) kallas för partikulärlösning.

Hur man beräknar partikulärlösningar:

$$\boxed{y'' + ay' + by = h(x), \quad a, b \text{ konstanter}}$$

Vi delar upp i fall beroende på högerledet $h(x)$.

I) $h(x)$ = polynom (specialfall $h(x)$ konstant)

Ex: Hitta en lösning till ekvationen

$$y'' - 2y' + 3y = 8 \quad (*)$$

Vi provar med $y = C$, C konstant.

Då får vi $y' = y'' = 0$, och insättning i (*) ger

$$0 - 2\cdot 0 + 3C = 8 \iff C = \frac{8}{3} \quad \text{Svar: } y = \frac{8}{3}.$$

Ex: Hitta en lösning till $y'' + 4y' - y = 2x + 1$.

Prova att ansätta $y = Ax + B$ (samma grad som högerledet)

Vi får $y' = A$, $y'' = 0$, och

$$0 + 4A - (Ax + B) = 2x + 1 \iff -Ax + (4A - B) = 2x + 1$$

$$\iff \begin{cases} -A = 2 \\ 4A - B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -2 \\ B = -9 \end{cases}. \quad \text{Svar: } y = -2x - 9.$$

Ex: Hitta en lösning till $y'' - 2y' = -4x + 4$.

Vi ansätter återigen $y = Ax + B$, och får $y' = A$, $y'' = 0$.

4

$$0 - 2A = -4x + 4 \quad \text{Går ej! } A \text{ är en konstant.}$$

Vi provar att ansätta en grad högre: $y = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$.

Detta ger $y' = 2Ax + B$, $y'' = 2A$, och

$$2A - 2(2Ax + B) = -4x + 4 \iff$$

$$-4Ax + (2A - 2B) = -4x + 4 \iff$$

$$\begin{cases} -4A = -4 \\ 2A - 2B = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}. \quad \text{Svar: } y = x^2 - x.$$

Allmän princip: Ansätt samma grad som HL.
- om $b = 0, a \neq 0$, multiplicera med x.
- om $a = b = 0$, integrera 2 ggr.

Ex: Lös (dvs. hitta alla lösningar till)

$$y'' - y' - 2y = x^2 - x - 2.$$

Lösning: Lösningarna ges av $y = y_h + y_p$.

Bestäm y_h: Lös $y'' - y' - 2y = 0$. (Föreläsning 15)

Kar. ekv. $p(r) = r^2 - r - 2 = 0 \iff \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 2 \end{cases}$, ger lösn.

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \quad (C_1, C_2 \text{ konst.})$$

Bestäm y_p: Vi ansätter $y = Ax^2 + Bx + C$ och får

$y' = 2Ax+B$, $y''=2A$. Insättning ger (5)

$$2A - (2Ax+B) - 2(Ax^2+Bx+C) = x^2-x-2$$

$$\iff -2Ax^2 + (-2A-2B)x + (2A-B-2C) = x^2-x-2$$

$$\iff \begin{cases} -2A = 1 \\ -2A - 2B = -1 \\ 2A - B - 2C = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -1/2 \\ B = 1 \\ C = 0 \end{cases}$$

Detta ger $y_p = -\frac{1}{2}x^2 + x$

Svar: $y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + x$.

Ex: Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y''-y'-2y = x^2-x-2, \quad y(0)=1,\ y'(0)=-3.$$

Lösning: Samma ekv. som ovan. Återstår bara att bestämma konstanterna.

$$y(0) = C_1 + C_2 - 0 + 0 = 1.$$

Vi får $y' = -C_1e^{-x} + 2C_2e^{2x} - x + 1$, och

$$y'(0) = -C_1 + 2C_2 - 0 + 1 = -3$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + 2C_2 = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

Svar: $y = 2e^{-x} - e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + x$.

II) $h(x) = \text{polynom} * e^{\alpha x}$ (α konstant) (6)

Vi gör först substitutionen $y(x) = z(x)e^{\alpha x}$!

Ex: Hitta en lösning till $y'' + 3y' + 2y = (x+1)e^{2x}$ (*)

Sätt $y = ze^{2x}$. Detta ger

$$y' = z'e^{2x} + 2ze^{2x} = e^{2x}(z'+2z)$$

$$y'' = z''e^{2x} + 2z'e^{2x} + 2z'e^{2x} + 4ze^{2x} = e^{2x}(z''+4z'+4z) \quad \text{(produktregeln!)}$$

$$(*) \iff \cancel{e^{2x}}\Big((z''+4z'+4z) + 3(z'+2z) + 2z\Big) = (x+1)\cancel{e^{2x}}$$

$$\iff z'' + 7z' + 12z = x+1 \quad \text{(Fall I)}$$

Vi ansätter $z = Ax+B$. Detta ger $z'=A$, $z''=0$, och

$$0 + 7A + 12(Ax+B) = x+1$$

$$\iff 12Ax + (7A+12B) = x+1 \iff \begin{cases} 12A = 1 \\ 7A+12B = 1 \end{cases}$$

$\iff \begin{cases} A = 1/12 \\ B = 5/144 \end{cases}$. Vi får lösn. $z = \frac{1}{12}x + \frac{5}{144}$,

vilket ger $y = ze^{2x} = \left(\frac{1}{12}x + \frac{5}{144}\right)e^{2x}$.

Svar: $y = \left(\frac{1}{12}x + \frac{5}{144}\right)e^{2x}$.

III) $h(x) = \text{polynom} * \begin{cases} \cos\alpha x \\ \sin\alpha x \end{cases}$, där α konstant (och polynomet reellt)

Ex: Bestäm en lösning till ekv. (7)

$$y'' + 9y = \sin 3x.$$

Vi löser först en hjälpekvation:

$$y'' + 9y = e^{i3x} \quad (= \cos 3x + i\sin 3x)$$

Hjälpekvationen tillhör fall II, så vi gör subst. $y = ze^{i3x}$. Produktregeln ger

$$y' = z'e^{i3x} + 3ize^{i3x} = e^{i3x}(z'+3iz)$$

$$y'' = z''e^{i3x} + 3iz'e^{i3x} + 3iz'e^{i3x} + (3i)^2ze^{i3x} = e^{i3x}(z''+6iz'-9z)$$

Insättning ger

$$\cancel{e^{i3x}}\Big((z''+6iz'-9z) + 9z\Big) = \cancel{e^{i3x}}$$

$$\iff z'' + 6iz' = 1 \quad \text{(Fall I)}$$

Ansätt $z = Ax$. Detta ger $z'=A$, $z''=0$, och vi får

$$0 + 6iA = 1 \iff A = \frac{1}{6i} = -\frac{i}{6}.$$

Vi får $z = -\frac{i}{6}x$ och $y = -\frac{i}{6}xe^{i3x}$.

Detta är lösningen till hjälpekvationen.

$$y_0 = -\frac{i}{6}xe^{i3x} = -\frac{i}{6}x(\cos 3x + i\sin 3x) = \underbrace{\frac{x}{6}\sin 3x}_{\text{Re}\,y_0} + i\underbrace{\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)}_{\text{Im}\,y_0}$$

Vad blir då lösningen till $y'' + 9y = \sin 3x$? (8)

OBS!

$$\left(\frac{x}{6}\sin 3x + i\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)\right)'' + 9\left(\frac{x}{6}\sin 3x + i\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)\right) = \cos 3x + i\sin 3x$$

$$\iff \left(\frac{x}{6}\sin 3x\right)'' + i\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)'' + 9\left(\frac{x}{6}\sin 3x\right) + i\cdot 9\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right) = \cos 3x + i\sin 3x$$

$$\iff \left(\left(\frac{x}{6}\sin 3x\right)'' + 9\left(\frac{x}{6}\sin 3x\right)\right) + i\left(\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)'' + 9\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)\right) = \cos 3x + i\sin 3x$$

Alltså följer att

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{6}\sin 3x\right)'' + 9\left(\frac{x}{6}\sin 3x\right) = \cos 3x \\ \left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right)'' + 9\left(-\frac{x}{6}\cos 3x\right) = \sin 3x \end{cases}$$

och vi ser att $\text{Im}\,y_0 = -\frac{x}{6}\cos 3x$ löser vår ekvation!

Svar: $y = -\frac{x}{6}\cos 3x$.

Allmänt: y_0 löser hjälpekvationen $y'' + ay' + by = p(x)e^{i\alpha x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Re}\,y_0 \text{ löser } y''+ay'+by = p(x)\cos\alpha x \\ \text{Im}\,y_0 \text{ löser } y''+ay'+by = p(x)\sin\alpha x \end{cases}$$

IV) Linjäritet:

Ex: Hitta en lösning till $y'' + 9y = \sin 3x - x^2$ (*)

Strategi:
- Hitta en lösning y_{p_1} till $y''+9y = \sin 3x$
- Hitta en lösning y_{p_2} till $y''+9y = -x^2$

Linjäritet ger att $y_{p_1} + y_{p_2}$ är en lösning till (*) □