LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIM. ANALYS A3/B2
2012–03–08 kl. 8–13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Bestäm en primitiv funktion till

a) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ (0.5) b) $x\ln(x+1)$ (0.5)

2. a) Lös ekvationen $z^2+(2+2i)z+\frac{3}{2}i=0.$ (0.5)

b) Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_4^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}\,dx. \qquad (0.5)$$

3. a) Kurvorna

$$y=\frac{1}{2x+3},\quad x\geq 0,\qquad \text{och}\qquad y=\tfrac{1}{2}x,\quad x\geq 0,$$

avgränsar tillsammans med y-axeln ett begränsat område. Beräkna arean av området. (0.5)

b) En skulptur som står på marken har höjden 3 meter. För skulpturen gäller det att ett horisontellt tvärsnitt vid höjden x meter över marken har formen av en rektangel med sidorna $1+x$ respektive $4-x$ meter. Bestäm skulpturens volym. (0.5)

4. a) Bestäm högerledet $h(x)$ så att $y=x^2e^{-x}$ blir en lösning till differentialekvationen

$$y''+2y'+y=h(x).$$

Ange även samtliga lösningar till differentialekvationen. (0.5)

b) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$xy'=y\ln y,\quad x>0,\qquad y(1)=2. \qquad (0.5)$$

5. a) Formulera analysens huvudsats och bevisa sedan denna genom att använda integralkalkylens medelvärdessats. (0.6)

b) Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 3 till funktionen

$$S(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt. \qquad (0.4)$$

VAR GOD VÄND!

6. Två stycken sjöar ligger längs ett vattendrag. Rent vatten flödar till den första sjön. Samtidigt flödar vatten från den första sjön till den andra sjön, och vatten från den andra sjön flödar vidare ner längs vattendraget. Både in- och utflöde för vardera sjön är 500 m^3 per timme. Den första sjön innehåller $100 \cdot 10^3$ m^3 vatten och den andra sjön $200 \cdot 10^3$ m^3.

Vid en viss tidpunkt kraschar en lastbil med 8 ton giftigt material i den första sjön. Vi kan anta att allt giftigt material omedelbart hamnar i sjön, och att volymen i sjön inte påverkas av detta. Vidare kan vi anta att allt vatten kontinuerligt hålls perfekt blandat av vattendraget.

a) Bestäm mängden giftigt material i den *första* sjön som funktion av tiden. (0.4)

b) Bestäm mängden giftigt material i den *andra* sjön som funktion av tiden. (0.4)

c) Vid vilken tid blir mängden giftigt material i den *andra* sjön som störst? (0.2)

LYCKA TILL!