

1. a) Eftersom det rör sig om en rationell funktion, så utför vi följande steg:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx &= \int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx \stackrel{\text{p.bråksuppl.}}{=} \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \\ &= \ln|x+1| - \ln|x+2| + C = \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C.\end{aligned}$$

En primitiv funktion ges alltså av $\ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right|$.

- b) Här är det lämpligt att partialintegrera:

$$\begin{aligned}\int x \ln(x+1) dx &= \frac{1}{2}x^2 \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+1} dx \stackrel{\text{pol.div.}}{=} \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln(x+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1) \right) + C = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 1) \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + C.\end{aligned}$$

En primitiv funktion ges alltså av $\frac{1}{2}(x^2 - 1) \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$.

Anm: Räkningarna kan förenklas något om man väljer $\frac{1}{2}(x^2 - 1)$ som primitiv i det första steget.

2. a) Vi kvadratkompletterar och får

$$\begin{aligned}z^2 + (2+2i)z + \frac{3}{2}i &= 0 & \Leftrightarrow & (z+1+i)^2 - (1+i)^2 + \frac{3}{2}i = 0 \\ \Leftrightarrow (z+1+i)^2 &= \frac{1}{2}i & \stackrel{\text{sätt } w=z+1+i}{\Leftrightarrow} & w^2 = \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

Sätter vi $w = a + bi$ så följer det att

$$\begin{aligned}(a+bi)^2 &= \frac{1}{2}i & \Leftrightarrow & (a^2 - b^2) + 2abi = \frac{1}{2}i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 &= 0, \\ 2ab &= \frac{1}{2} \end{cases} & \Leftrightarrow & (a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ eller } (a, b) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right).\end{aligned}$$

För att lösa systemet kan vi utnyttja att $|w^2| = |w|^2 = a^2 + b^2 = \left| \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2}$. Tillsammans med ekvationen $a^2 - b^2 = 0$ får vi då att $a^2 = b^2 = \frac{1}{4}$, dvs. att $a = b = \pm \frac{1}{2}$. Slutligen indikerar ekvationen $2ab = \frac{1}{2}$ att a och b ska ha *lika* tecken. Rötterna till ekvationen är således

$$\begin{aligned}z_1 &= w_1 - 1 - i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - 1 - i = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \\ z_2 &= w_2 - 1 - i = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - 1 - i = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i.\end{aligned}$$

b) Vi beräknar först en primitiv funktion med hjälp av variabelbyte:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 2 dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{array} \right] = \int \frac{2}{t^2 + 4} dt = \\ &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 1} dt = \arctan \frac{t}{2} + C = \arctan \frac{\sqrt{x}}{2} + C.\end{aligned}$$

Den generaliserade integralen blir nu

$$\begin{aligned}\int_4^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)} dx &= \lim_{X \rightarrow \infty} \int_4^X \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)} dx = \lim_{X \rightarrow \infty} \left[\arctan \frac{\sqrt{x}}{2} \right]_4^X = \\ &= \lim_{X \rightarrow \infty} \left(\arctan \frac{\sqrt{X}}{2} - \arctan 1 \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

3. a) Vi beräknar först x -koordinaten för skärningen mellan kurvorna:

$$\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{2}x \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 2x^2 + 3x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad x = -2,$$

där endast $x = \frac{1}{2}$ är intressant i vårt fall. Eftersom $\frac{1}{2x+3} \geq \frac{1}{2}x$ då $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, så blir arean av området

$$A = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2x+3} - \frac{1}{2}x \right) dx = \left[\frac{1}{2} \ln |2x+3| - \frac{1}{4}x^2 \right]_0^{1/2} = \dots = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{16}.$$

b) En tunn horisontell skiva med tjocklek dx , vid höjden x meter över marken, är (approximativt) ett rätblock med volymen $(1+x)(4-x)dx$. Totalvolymen får vi då genom att integrera dessa volymbidrag:

$$V = \int_0^3 (1+x)(4-x) dx = \int_0^3 (4+3x-x^2) dx = \left[4x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = \frac{33}{2}.$$

4. a) Med $y = x^2 e^{-x}$ så följer det genom (upprepad) användning av produktregeln att

$$y' = (2x - x^2)e^{-x} \quad \text{och} \quad y'' = (2 - 4x + x^2)e^{-x}.$$

Insättning i ekvationen ger

$$\begin{aligned}(2 - 4x + x^2)e^{-x} + 2(2x - x^2)e^{-x} + x^2e^{-x} &= \\ &= \left((2 - 4x + x^2) + 2(2x - x^2) + x^2 \right) e^{-x} = 2e^{-x},\end{aligned}$$

och således är $h(x) = 2e^{-x}$.

En partikulärlösning till den linjära ekvationen i uppgiften är enligt ovan $y_p = x^2 e^{-x}$. Motsvarande homogena ekvation $y'' + 2y' + y = 0$ har den karakteristiska ekvationen $p(r) = r^2 + 2r + 1 = 0$, med dubbelroten $r_{1,2} = -1$, så den allmänna lösningen till denna är $y_h = (C_1 x + C_2)e^{-x}$. Vi drar slutsatsen att samtliga lösningar till ekvationen i uppgiften ges av

$$y = y_h + y_p = (C_1 x + C_2)e^{-x} + x^2 e^{-x} = (x^2 + C_1 x + C_2)e^{-x},$$

där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.

b) Ekvationen är separabel, och vi kan därför lösa den på följande sätt:

$$\begin{aligned}
 xy' &= y \ln y & \Leftrightarrow & \quad y' \cdot \frac{1}{y \ln y} = \frac{1}{x} \\
 \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y \ln y} dy &= \frac{1}{x} dx & \Leftrightarrow & \quad \ln |\ln y| = \ln x + C \\
 \Leftrightarrow \quad |\ln y| &= e^{\ln x + C} = e^C e^{\ln x} = e^C x & \Leftrightarrow & \quad \ln y = \pm e^C x = Dx.
 \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret $y(1) = 2$ ger nu $D = \ln 2$, och den sökta lösningen är därför

$$y = e^{(\ln 2)x} = (e^{\ln 2})^x = 2^x, \quad x > 0.$$

5. a) Se läroboken sidan 315–316.

b) Använder vi analysens huvudsats, och därefter kedjeregeln och produktregeln, så följer det att

$$S'(x) = e^{-x^2}, \quad S''(x) = -2xe^{-x^2} \quad \text{och} \quad S'''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}.$$

Sätter vi sedan $x = 0$ så får vi

$$S(0) = \int_0^0 e^{-t^2} dt = 0, \quad S'(0) = 1, \quad S''(0) = 0, \quad \text{och} \quad S'''(0) = -2.$$

Maclaurinpolynomet av ordning 3 ges därför av

$$p_3(x) = S(0) + S'(0)x + \frac{S''(0)}{2}x^2 + \frac{S'''(0)}{3!}x^3 = x - \frac{1}{3}x^3.$$

6. a) Om vi låter $y(t)$ vara antalet ton giftigt material i den första sjön vid tiden t timmar, så kan vi modellera förloppet med differentialekvationen:

$$y'(t) = -500 \cdot \frac{y(t)}{100 \cdot 10^3} \quad \Leftrightarrow \quad y'(t) = -\frac{1}{200}y(t).$$

Faktorn $\frac{y(t)}{100 \cdot 10^3}$ anger koncentrationen giftigt material i enheten ton/m³. Med utflödet 500 m³/timme drar vi då slutsatsen att giftet avlägsnas med hastigheten $500 \cdot \frac{y(t)}{100 \cdot 10^3}$ ton/timme.

Ekvationen kan lösas både med integrerande faktor och som en separabel ekvation. Med integrerande faktor får vi

$$\begin{aligned}
 y' &= -\frac{1}{200}y & \Leftrightarrow & \quad y' + \frac{1}{200}y = 0 & \xrightarrow{\text{int. faktor } e^{t/200}} & \quad (ye^{t/200})' = 0 \\
 & & \Leftrightarrow & \quad ye^{t/200} = C & \Leftrightarrow & \quad y = Ce^{-t/200}.
 \end{aligned}$$

Om vi låter $t = 0$ svara mot tidpunkten då lastbilen kraschar, så får vi villkoret $y(0) = 8$. Detta ger $C = 8$, och den sökta funktionen är därför $y(t) = 8e^{-t/200}$.

- b) Vi låter $z(t)$ beteckna antalet ton giftigt material i den andra sjön vid tiden t timmar, där $t = 0$ lämpligen svarar mot tidpunkten då det giftiga vattnet börjar anlända till sjön¹. Förloppet kan nu modelleras med differentialekvationen

$$z'(t) = 500 \cdot \frac{8e^{-t/200}}{100 \cdot 10^3} - 500 \cdot \frac{z(t)}{200 \cdot 10^3} \quad \Leftrightarrow \quad z'(t) = \frac{1}{25}e^{-t/200} - \frac{1}{400}z(t),$$

där vi utnyttjar funktionen $y(t) = 8e^{-t/200}$ från a)-uppgiften. Löser vi ekvationen med integrerande faktor, så får vi

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{25}e^{-t/200} - \frac{1}{400}z & \Leftrightarrow & \quad z' + \frac{1}{400}z = \frac{1}{25}e^{-t/200} \\ \text{int. faktor } e^{t/400} & \Leftrightarrow & (ze^{t/400})' &= \frac{1}{25}e^{-t/400} & \Leftrightarrow & \quad ze^{t/400} = \int \frac{1}{25}e^{-t/400} dt \\ & \Leftrightarrow & ze^{t/400} &= -16e^{-t/400} + C & \Leftrightarrow & \quad z = -16e^{-t/200} + Ce^{-t/400}. \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret $z(0) = 0$ ger nu att $C = 16$, och den sökta funktionen blir därför $z = 16(e^{-t/400} - e^{-t/200})$.

- c) Deriverar vi funktionen $z(t)$ får vi

$$z'(t) = 16\left(-\frac{1}{400}e^{-t/400} + \frac{1}{200}e^{-t/200}\right) = -\frac{16}{400}e^{-t/400}(1 - 2e^{-t/400}),$$

och $z'(t) = 0$ precis då $1 - 2e^{-t/400} = 0$, dvs. då $t = 400 \ln 2$. Teckenstudium, alternativt andraderivata, visar att det rör sig om ett maximum. Mängden giftigt material är alltså som störst $400 \ln 2$ timmar efter det att giftet börjat anlända till sjön.

¹Eftersom vi saknar exakt information om hur vatten flödar från den första till den andra sjön, vi skulle t.ex. kunna ha en viss tidsförskjutning, så är det tillåtet att förutsätta att tidpunkten $t = 0$ är samma som i a)-uppgiften.