①

Föreläsning 5:

Standardderivator:

Vi har nedan visat

Sats:
$$De^x = e^x$$
$$D\ln x = \frac{1}{x}, \quad x>0$$

Ex: Derivera $\ln|x|$, $x \neq 0$!

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x & \text{då } x>0 \\ \ln(-x) & \text{då } x<0 \end{cases}$$

$x>0$: $D\ln|x| = D\ln x = \frac{1}{x}$ enligt ovan.

$x<0$: $$D\ln|x| = D\ln(-x) \overset{\text{kedjeregeln}}{=} \frac{1}{-x}\cdot\underbrace{(-1)}_{\text{innederivata}} = \frac{1}{x}$$

Sats: $D\ln|x| = \frac{1}{x}, \quad x\neq 0$

Bevis: Se exempel ovan!

Sats: $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha$ konstant

②

Bevis: Vi visar det för fallet $x>0$:

$$Dx^\alpha = De^{\ln x^\alpha} = De^{\alpha\ln x} \overset{\text{kedjeregeln}}{=} e^{\alpha\ln x}\cdot D(\alpha\ln x) = e^{\alpha\ln x}\cdot\frac{\alpha}{x} = x^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \quad \square$$

Ex (Derivata av ett polynom):

$$D(7x^5+3x^3+2) = 7\cdot 5x^4 + 3\cdot 3\cdot x^2 + 0 = 35x^4+9x^2$$

Ex: Derivera x^x !

OBS! $Dx^x \neq x\cdot x^{x-1}$ ej konstant!

Rätt sätt: $$Dx^x = De^{\ln x^x} = De^{x\ln x} \overset{\text{kedjeregeln}}{=} e^{x\ln x}\cdot D(x\ln x) \overset{\text{produktregeln}}{=} e^{x\ln x}\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x+1)$$

Sats: $Da^x = a^x\ln a, \quad a>0$ konstant

Bevis: $$Da^x = De^{\ln a^x} = De^{x\ln a} \overset{\text{kedjeregeln}}{=} e^{x\ln a}\cdot D(x\ln a) = e^{x\ln a}\cdot\ln a = a^x\ln a \quad \square$$

③

Sats:
(i) $D\sin x = \cos x$
(ii) $D\cos x = -\sin x$
(iii) $D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
(iv) $D\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Ex: Beräkna $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}$! $\left(\text{"}\frac{0}{0}\text{"}\right)$

$$\frac{\cos x-1}{x} = \frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)} = \frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)} \overset{\text{trig.ettan}}{=} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\cdot\frac{-\sin x}{\cos x+1} \to 1\cdot\frac{-\sin 0}{\cos 0+1} = \underline{\underline{0}}, \quad x\to 0$$

Bevis (satsen ovan):

(i): $$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h} = \sin x\cdot\underbrace{\frac{\cos h-1}{h}}_{\to 0 \text{ enl. ovan}} + \cos x\cdot\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \to \cos x, \quad h\to 0$$

(ii) $$D\cos x = D\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \overset{\text{kedjeregeln}}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot D\left(\frac{\pi}{2}-x\right) =$$

④

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1) = -\sin x$$

(iii) $$D\tan x = D\frac{\sin x}{\cos x} \overset{\text{kvotregeln}}{=} \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} \overset{\text{trig. ettan}}{=} \frac{1}{\cos^2 x}$$

(iv) På motsv. sätt som (iii) $\square$

Ex: Derivera $f(x) = x\cos(x^2)$!

$$D\,x\cos(x^2) = 1\cdot\cos(x^2) + x\cdot(-\sin(x^2))\cdot 2x = \cos(x^2) - 2x^2\sin(x^2)$$

Sats:
(i) $D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(ii) $D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(iii) $D\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
(iv) $D\,\mathrm{arccot}\, x = -\frac{1}{1+x^2}$

Bevis: (i): $y = \arcsin x \iff x = \sin y \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$$D\arcsin x = \frac{1}{D\sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}} =$$

OBS! $\cos y \ge 0$ då $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(ii) Gör som i (i)!

(iii) $y = \arctan x \iff x = \tan y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$$D\arctan x = \frac{1}{D\tan y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{\cos^2 y}{1} =$$

$$= \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\tan^2 y} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

(iv) Gör som i (iii)! $\square$

Ex: Beräkna (i) $D\cosh x$!
(ii) $D\sinh x$

Def:
$$\begin{cases} \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$
Vi får

$$D\cosh x = D\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + (-1)e^{-x}}{2} =$$
$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$D\sinh x = D\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - (-1)e^{-x}}{2} =$$
$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

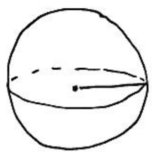
Implicit derivering:

Implicit derivering $\approx$ derivering av en "okänd" funktion. Kan användas för att hitta samband mellan olika derivator!

Ex: En klotformad ballong blåses upp. Vid en viss tidpunkt t_0 är ballongens radie 8 cm, och ballongens radie växer vid denna

tidpunkt med en hastighet av $\frac{3}{2}$ cm/s. Med vilken hastighet förändras ballongens volym vid denna tidpunkt?

Lösning: $V(t)$ cm^3



$r(t)$ cm

Vi vet att $r'(t_0) = 3/2$ och vill beräkna $V'(t_0)$. Dessutom vet vi att $r(t_0) = 8$.

Samband: $\boxed{V(t) = \frac{4\pi}{3} r(t)^3}$

Observera att funktionerna $V(t)$ och $r(t)$ är "okända". Vi deriverar leduis:

inre derivata

$$V'(t) = \frac{4\pi}{3} \cdot 3\, r(t)^2 \cdot r'(t) = 4\pi\, r(t)^2 r'(t)$$

Sätt $t = t_0$:

$$V'(t_0) = 4\pi\, r(t_0)^2 r'(t_0) = 4\pi \cdot 8^2 \cdot \frac{3}{2} =$$
$$= 384\pi$$

Svar: 384π cm^3/s.

(Hoppa över avsnittet "Derivation av komplexvärda funktioner" (så länge))

Logaritmisk derivering (överkurs):

Ex: Derivera $f(x) = \dfrac{e^{x^2} \cdot (2x^2+4)^5}{\sin 2x \cdot (\arctan x)^3}$!

Lösning:

$$\ln|f(x)| = \ln\left|\frac{e^{x^2}\cdot(2x^2+4)^5}{\sin 2x \cdot (\arctan x)^3}\right| =$$ logaritmlagar

$$= \ln e^{x^2} + \ln(2x^2+4)^5 - \ln|\sin 2x| - \ln|\arctan x|^3 =$$
$$= x^2 + 5\ln(2x^2+4) - \ln|\sin 2x| - 3\ln|\arctan x|$$

$$\Rightarrow D\ln|f(x)| = 2x + \frac{5\cdot 4x}{2x^2+4} - \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} - 3\cdot\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x} =$$
$$= 2x + \frac{10x}{x^2+2} - 2\cot 2x - \frac{3}{(x^2+1)\arctan x}$$

Samtidigt vet vi från kedjeregeln att

$$D\ln|f(x)| = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) \iff f'(x) = f(x)\cdot D\ln|f(x)|$$

Svar:

$$f'(x) = \frac{e^{x^2}\cdot(2x^2+4)^5}{\sin 2x \cdot (\arctan x)^3}\cdot\left(2x + \frac{10x}{x^2+2} - 2\cot 2x - \frac{3}{(x^2+1)\arctan x}\right)$$