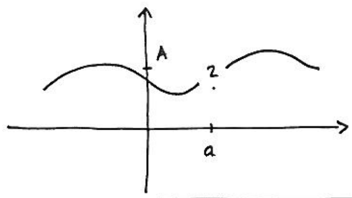
Föreläsning 2:

(1)

Gränsvärde då $x \to a$:



Def ($f(x) \to A$ då $x \to a$): Låt a, A vara tal.

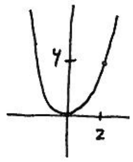
Vi skriver $f(x) \to A$ då $x \to a$ (alt. $\lim_{x \to a} f(x) = A$) om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta_\varepsilon > 0$ sådant att
$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ för alla } 0 < |x-a| < \delta_\varepsilon$$

Anm: Betyder att $f(x)$ kommer godtyckligt nära A bara x är tillräckligt nära a.

Anm 2: Även för gr. värden då $x \to a$ gäller "naturliga" räknenegler för de fyra räknesätten och funktionssammansättning. Även instängningssatser fungerar som i fallet $x \to \infty$.

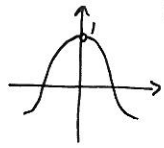
Ex: $f(x) = x^2 \to 2^2 = 4$ då $x \to 2$

helt "naturligt"



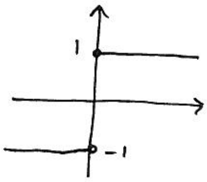
(2)

Men, mer intressant,
$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \to 1 \text{ då } x \to 0$$



("farligt fall" "$\frac{0}{0}$"). Detta visas nedan.

Ex: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x \geq 0 \\ -1 & \text{då } x < 0 \end{cases}$



Här saknas gr.värdet $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Funktionen närmar sig inte ett specifikt tal.

Däremot har $f(x)$ både vänster- och högergränsvärde då $x \to 0$:
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \quad \square$$

Anm: $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = A \iff \lim_{x \to a} f(x) = A$

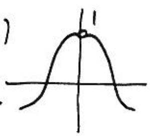
Ex: Visa att $\frac{\sin x}{x} \to 1$ då $x \to 0$.

Vi vet sedan tidigare att $\sin x < x < \tan x$ då $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Låt $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Vi får då
$$\sin x < x < \tan x \iff \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$
$$\iff 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} \iff 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

(3)

Eftersom $\frac{1}{\cos x} \to \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$ då $x \to 0^+$ följer det av instängning att $\frac{x}{\sin x} \to 1$ då $x \to 0^+$, dvs.
$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} \to \frac{1}{1} = 1 \quad \text{då } x \to 0^+.$$

Funktionen $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ är jämn, eftersom
$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$$

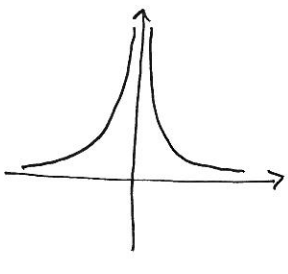


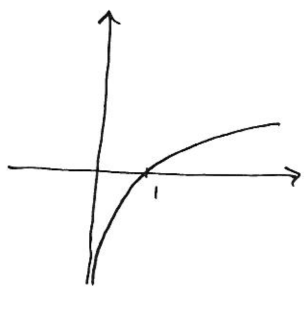
Vi inser att även $\frac{\sin x}{x} \to 1$ då $x \to 0^-$

Slutsats: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \square$

Anm: Det går även att naturligt införa oegentliga gränsvärden $\pm\infty$ då $x \to a$ resp. $x \to a^-$, $x \to a^+$

Ex: a) $\frac{1}{x^2} \to \infty$ då $x \to 0$ b) $\ln x \to -\infty$ då $x \to 0^+$

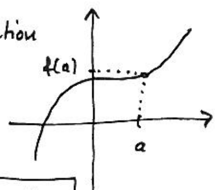




(4)

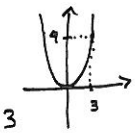
Kontinuitet:

Det "vanligaste" fallet då en funktion f är definierad i a är att
$$f(x) \to f(a) \text{ då } x \to a$$



Def: Vi säger att f är kontinuerlig i a om $f(x) \to f(a)$ då $x \to a$

Ex: $f(x) = x^2$ är t.ex. kontinuerlig i 3, eftersom
$$f(x) = x^2 \to 3^2 = f(3) \text{ då } x \to 3$$



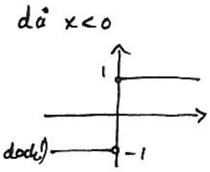
Den är för övrigt kontinuerlig i alla punkter.

Ex: Funktionen $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x \geq 0 \\ -1 & \text{då } x < 0 \end{cases}$

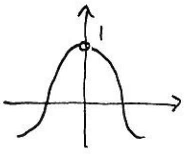
är ej kontinuerlig i 0.

Gränsvärdet då $x \to 0$ saknas!

(Den är kontinuerlig i alla andra punkter dock!)



Ex: Funktionen $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ är ej kontinuerlig i 0. Den är ju inte ens definierad där!

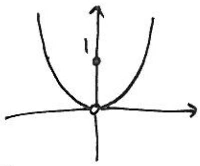


Däremot är den kontinuerlig i övriga punkter.

Ex: Funktionen $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{då } x \neq 0 \\ 1 & \text{då } x = 0 \end{cases}$

har visserligen ett gränsvärde då $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$



Men då detta inte är lika med $f(0) = 1$ är f ej kontinuerlig i 0.
(I övriga punkter är f kontinuerlig)

> **Def:** En funktion f sägs vara <u>kontinuerlig</u> om funktionen är kontinuerlig i varje punkt i dess definitionsmängd.

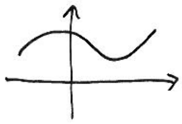
Ex:
$f(x) = x^2$ är kontinuerlig

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x \geq 0 \\ -1 & \text{då } x < 0 \end{cases}$ är ej kontinuerlig

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ är kontinuerlig (!)

$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{då } x \neq 0 \\ 1 & \text{då } x = 0 \end{cases}$ är ej kontinuerlig

<u>Grafisk tolkning</u>: Att f är kontinuerlig betyder att dess graf är sammanhängande och saknar "språng" (i varje intervall i D_f)



> **Sats:** Varje uttryck i elementära funktioner, de fyra räknesätten och funktionssammansättning ger en kontinuerlig funktion.

Ex: Funktionen

$$f(x) = \frac{\sin(x^2 + \ln x) - \dfrac{1}{\cos x + e^{x^2}}}{(x-4)\sqrt{\tan x + 8} - {}^4\log x}$$

är kontinuerlig! □

<u>Standardgränsvärden då $x \to a$:</u>

> **Sats:**
> a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
>
> b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
>
> c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
>
> d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \qquad (\alpha > 0)$

Bevis: a) Redan visat.

b) $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{1}{x}\ln(1+x) = \ln(1+x)^{1/x} =$

$$= \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{t} \\ x \to 0 \Leftrightarrow t \to \pm\infty \end{array}\right] = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$$

$$\longrightarrow \ln e = 1 \quad \text{då } t \to \pm\infty.$$

c) $$\frac{e^x - 1}{x} = \left[\begin{array}{l} t = e^x - 1 \Leftrightarrow x = \ln(1+t) \\ x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{t}{\ln(1+t)} = \frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} \longrightarrow \frac{1}{1} = 1 \text{ då } t \to 0.$$

d) Läs själva! (Gör bytet $t = 1/x$!) □

Standardgränsvärden behövs för att hantera de "farliga" fallen:

> "$\infty - \infty$", "$0 \cdot \infty$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$\frac{0}{0}$", "1^∞", "0^0", "∞^0"

Ex: Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x)}{x}$! $\left(\text{"}\frac{0}{0}\text{"}\right)$

$$\frac{\ln(1+4x)}{x} = 4 \cdot \frac{\ln(1+4x)}{4x} = \left[\begin{array}{l} t = 4x \Leftrightarrow x = \frac{t}{4} \\ x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0 \end{array}\right] =$$

$$= 4 \cdot \frac{\ln(1+t)}{t} \longrightarrow 4 \cdot 1 = \underline{\underline{4}} \quad \text{då } t \to 0$$

Ex: Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$! $\left(\text{"}\frac{0}{0}\text{"}\right)$

$$\frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{\sin 4x}{4x}}_{\to 1}} \longrightarrow \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{4} \text{ då } x \to 0.$$

□

Ex: Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{x^2}$! ("0^0")

$$x^{x^2} = e^{\ln x^{x^2}} = e^{\overbrace{x^2 \ln x}^{\to 0}} \longrightarrow e^0 = \underline{\underline{1}} \text{ då } x \to 0^+$$

> OBS!
> $x^{x^2} \to x^0 = 1$ då $x \to 0^+$ FEL!
>
> $x^{x^2} \to 0^{x^2} = 0$ då $x \to 0^+$ FEL!
>
> Kallas stegvis gränsövergång.