1

Föreläsning 9

Maclaurins och Taylors formler:

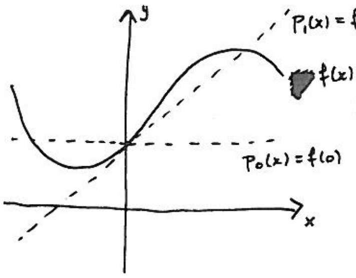
Funktionsvärden för polynom är "enkla" att beräkna,

t.ex. $f(x)=x^2+x \Rightarrow f(0.2)=(0.2)^2+0.2=0.04+0.2=\underline{\underline{0.24}}$

Men vad är t.ex. $\sin(0.2)$? $\ln(1.3)$?

Approximera funktioner med polynom!

Autag att vi vill approximera en funktion $f(x)$ nära $x=0$.



$P_0(x)=f(0)$ (konstant funktion)

$P_1(x)=f(0)+f'(0)x$ (tangenten i $x=0$)

$P_0(x)$ har samma funktionsvärde som f i $x=0$

$P_1(x)$ — " — funktionsvärde — " —
och derivata

En ännu bättre approximation borde vara ett andragradspolynom med samma funktionsvärde som f i $x=0$.
och derivata
och andraderivata

2

Vi provar med

$$P_2(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2.$$

Koll: $P_2(0)=f(0)$

$P_2'(x)=f'(0)+f''(0)x \Rightarrow P_2'(0)=f'(0)$

$P_2''(x)=f''(0) \Rightarrow P_2''(0)=f''(0)$ OK!

Fortsätt enligt samma princip:

$$\boxed{P_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

Påminnelse: $k!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k$

Polynomet $P_n(x)$ har samma värde i $x=0$ som f för varje derivata upp t.o.m. ordning n, och kallas Maclaurinpolynomet av ordning n till f.

Ex: Betrakta $f(x)=e^x$. Vi får

$$e^x=f(x)=f'(x)=f''(x)=f^{(3)}(x)=\ldots \text{ osv.}$$

Således $1=e^0=f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots$, och

$P_0(x)=1$, $P_1(x)=1+x$, $P_2(x)=1+x+\frac{x^2}{2}$,

$P_3(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$, ... osv.

$$\boxed{P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{x^n}{n!}}$$

3

Större n ger bättre approximation nära $x=0$.

Ex: Betrakta $f(x)=\sin x$.

$f(x)=\sin x$	$f^{(4)}(x)=\sin x$	....
$f'(x)=\cos x$	$f^{(5)}(x)=\cos x$	....
$f''(x)=-\sin x$	$f^{(6)}(x)=-\sin x$	osv.
$f^{(3)}(x)=-\cos x$	$f^{(7)}(x)=-\cos x$	

Det gäller att
$$\begin{cases} f^{(2m)}(x)=(-1)^m\sin x \\ f^{(2m+1)}(x)=(-1)^m\cos x \end{cases},\quad m\geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f^{(2m)}(0)=(-1)^m\sin 0=0 \\ f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m\underbrace{\cos 0}_{1}=(-1)^m \end{cases},\quad m\geq 0$$

$$\boxed{P_{2m+1}(x)=P_{2m+2}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}}$$

T.ex. får vi $P_1(x)=x$

$P_3(x)=x-\frac{x^3}{6}$

$P_5(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$

Dessa polynom ger, i tur och ordning, allt bättre approximationer nära $x=0$.

4

Ex: Vi har $P_1(0.2)=0.2$

$P_3(0.2)=0.2-\frac{(0.2)^3}{6}\approx 0.198667$

$P_5(0.2)=0.2-\frac{(0.2)^3}{6}+\frac{(0.2)^5}{120}\approx 0.1986693334$

Jämför med $\sin(0.2)=0.1986693308\ldots$

Frågor: – Vad menas med att approximationen blir bättre då polynomets grad ökar?
– Hur stort blir felet?

Sats (Maclaurins formel):

Om $f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x)$ är kontinuerliga i en omgivning av $x=0$, gäller för alla x i denna omgivning att

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

där β är ett tal mellan 0 och x.
(alternativt uttryckt $\beta=\theta x$ där $0\leq\theta\leq1$)

Bevis: Läs själva! (överkurs) □

Alt. skrivsätt $f(x)=P_n(x)+R_{n+1}(x)$

där $R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}x^{n+1}$

$R_{n+1}(x)$ kallas Lagranges restterm.

Ex: Visa att $e = 2.72 \pm 0.005$! (5)

Sätt $f(x) = e^x$. Vill beräkna $f(1) = e^1 = e$.

Maclaurins formel: $f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x)$.

Sätt $n=5, x=1$: $f(1) = p_5(1) + R_6(1)$

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} \quad \text{(se ovan!)}$$

$$\Rightarrow P_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{163}{60}$$

Vidare $R_6(x) = \frac{e^\beta}{6!}x^6$, β mellan 0 och x,

så $R_6(1) = \frac{e^\beta}{6!} = \frac{e^\beta}{720}$ där $0 \le \beta \le 1$.

Detta ger uppskattningen

$$0 \le R_6(1) = \frac{e^\beta}{720} \le \frac{e}{720} \le \frac{3}{720} = \frac{1}{240},$$

så $2.717 \approx \frac{163}{60} \le e \le \frac{163}{60} + \frac{1}{240} \approx 2.721$

och $e = 2.72 \pm 0.005$.

Ex: Visa att $\left| \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \right| \le \frac{x^3}{3}$

för alla $0 \le x \le 1$.

$f(x) = \ln(1+x)$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$,

$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$

Vi får (6)

$$\ln(1+x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(\theta x)}{6}x^3 =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cancel{2}}{3\cancel{6}(1+\theta x)^3}x^3 \quad \text{där } 0 \le \theta \le 1.$$

$$\left| \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \right| = \left| x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^3}x^3 - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^3} x^3 \right| \underset{0 \le x \le 1}{=} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^3} x^3 \le \frac{x^3}{3} \quad \text{Klart}$$

$$\boxed{\left.\begin{matrix} 0 \le \theta \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 \le \theta x \le 1 \Rightarrow 1 \le 1 + \theta x \le 2 \Rightarrow \frac{1}{(1+\theta x)^3} \le 1}$$

Anm: Vill vi få en uppskattning av

$\ln(1.3)$

kan vi sätta $x = 0.3$.

$P_2(x) = x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow P_2(0.3) = 0.3 - \frac{(0.3)^2}{2} = \underline{\underline{0.255}}$

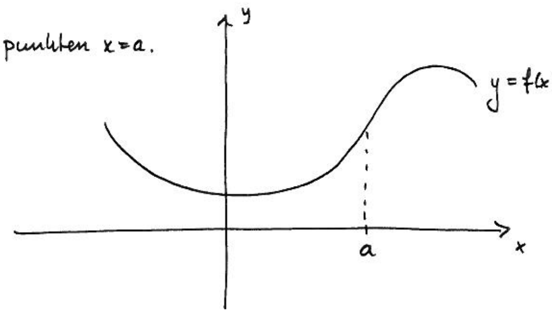
Felet blir då högst $\frac{(0.3)^3}{3} = 0.009$

Taylors formel:

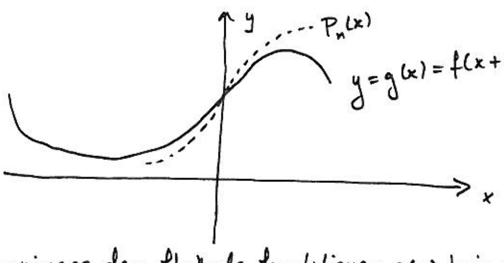
Ibland vill man approximera f kring en annan punkt än $x=0$.

(7)

Välj punkten $x=a$.



Flytta grafen a steg åt vänster! $\xleftarrow{a}$



Approximera den flyttade funktionen $g(x)$ kring $x=0$:

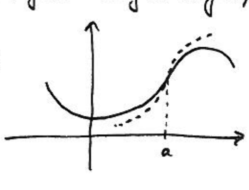
$$g(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x), \text{ dvs.}$$

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{g^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

där β mellan 0 och x.

Flytta tillbaka grafen (dvs. flytta a steg åt höger)! $\xrightarrow{a}$

Då gäller $f(x) = g(x-a)$



(8)

$$f(x) = g(x-a) = g(0) + g'(0)(x-a) + \frac{g''(0)}{2!}(x-a)^2 +$$

$$+ \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}(x-a)^n + \frac{g^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

där β mellan 0 och $x-a$.

Eftersom $g(x) = f(x+a)$ får vi

$$\left\{\begin{aligned} g(x) &= f(x+a) \\ g'(x) &= f'(x+a) \\ g''(x) &= f''(x+a) \\ &\vdots \\ g^{(n)}(x) &= f^{(n)}(x+a) \\ g^{(n+1)}(x) &= f^{(n+1)}(x+a) \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} g(0) &= f(a) \\ g'(0) &= f'(a) \\ g''(0) &= f''(a) \\ &\vdots \\ g^{(n)}(0) &= f^{(n)}(a) \\ g^{(n+1)}(\beta) &= f^{(n+1)}(\beta + a) = \\ &= f^{(n+1)}(\gamma) \end{aligned}\right.$$

$\gamma = \beta + a$

Då β mellan 0 och $x-a$, följer att γ mellan a och x.

Taylors formel:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \text{där } \gamma \text{ mellan } a \text{ och } x.$$