Föreläsning 7 (1)

Grafritning:

Ex: Skissera grafen till $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x+2}$.

Ange ev. lokala extrempunkter.

Lösning: 1) Bestäm derivatans nollställen och teckenväxlingar:

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - 1\cdot(x^2-3)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-x^2+3}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$$

Vi faktoriserar så långt som möjligt:

$$f'(x) = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$$

Nollställen $x=-1$ och $x=-3$, och ej def. för $x=-2$

(I dessa punkter kan derivatan växla tecken!)

2) Bilda teckenschema och värdetabell:

Ta med derivatans nollställen och punkter där f ej är definierad:

		-3		-2		-1	
$x+1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

(2)

Lokal maximipunkt $x=-3$ och lokal minimipunkt $x=-1$.

3) Beräkna gränsvärden:

Beräkna $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ och $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ respektive $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ för varje punkt a där f ej är definierad.

$x\to\pm\infty$:
$$f(x) = \frac{x^2-3}{x+2} = \frac{x^2}{x}\cdot\frac{1-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = x\cdot\frac{1-\overbrace{\frac{3}{x^2}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}} \to \begin{cases}\infty & \text{då } x\to\infty\\ -\infty & \text{då } x\to-\infty\end{cases}$$

$x\to-2^\pm$:
$$f(x) = \frac{x^2-3}{x+2} \to \begin{cases}\text{"}\frac{(-2)^2-3}{0^+}\text{"} = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} = \infty, & x\to-2^+\\ \text{"}\frac{(-2)^2-3}{0^-}\text{"} = \text{"}\frac{1}{0^-}\text{"} = -\infty, & x\to-2^-\end{cases}$$

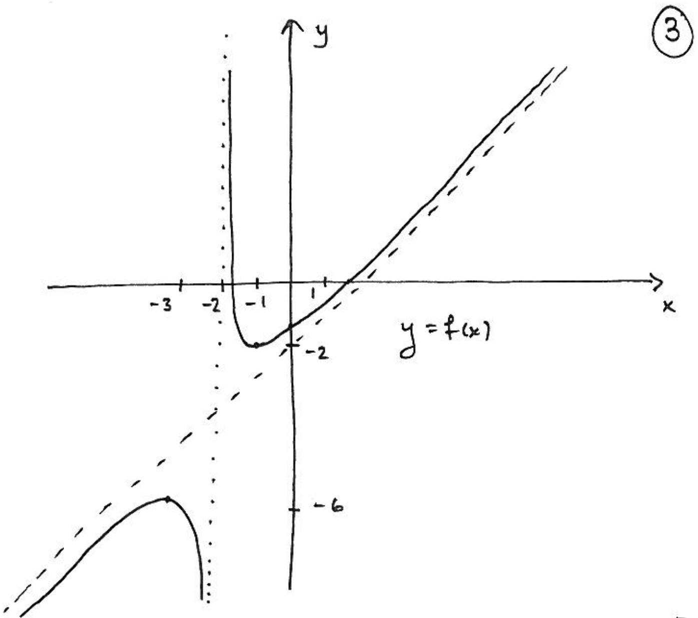
4) Skissera grafen!

(Ta (om möjligt) hjälp av grafens skärning med axlarna. Här får vi

$x=0$: $y = \frac{0-3}{0+2} = -\frac{3}{2}$

$y=0$: $0 = \frac{x^2-3}{x+2} \iff x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.7$)

(3)



Teckenväxlingar (teckenschema)

$+\ 0\ -$ ($\nearrow\ \searrow$) lok. max, $-\ 0\ +$ ($\searrow\ \nearrow$) lok. min

$-\ 0\ -$ ($\searrow\ \searrow$) eller $+\ 0\ +$ ($\nearrow\ \nearrow$) terrasspunkt (ej lok. extr. punkt)

Anm: Det finns ett annat sätt att ta reda på om en stationär punkt är en lok. extrempunkt:

(4)

Om $f'(a)=0$ gäller i) $f''(a)>0 \Rightarrow$ lok. min i a

ii) $f''(a)<0 \Rightarrow$ lok. max i a

Problem: – Om $f''(a)=0$ kan ingen slutsats dras

– Det kan vara svårt att beräkna andraderivatan (eller att avgöra tecknet av den!)

– Teckenväxlingar kan ske i annat än stat. punkter

Asymptoter: Låt $y=kx+m$ vara en linje.

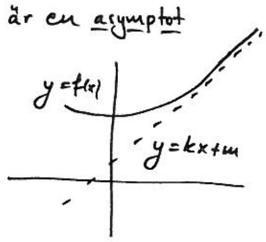
Om

$$f(x) - (kx+m) \to 0 \quad \text{då } x\to\infty$$

säger vi att linjen $y=kx+m$ är en asymptot till kurvan $y=f(x)$ då $x\to\infty$.

(Ibland även sned asymptot)

Motsv. def. då $x\to-\infty$.



Ex: Låt $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x+2}$. Asymptoter?

Gör en polynomdivision! Vi får då

$$f(x) = x-2+\frac{1}{x+2} \Rightarrow$$

$$f(x)-(x-2) = \frac{1}{x+2} \to 0 \quad \text{då } x\to\pm\infty.$$

(5)

Slutsats: $y=x-2$ är en (sned) asymptot både då $x\to\infty$ och $x\to-\infty$

Ex: Låt $f(x)=\arctan(x^2+1)$. Asymptoter?

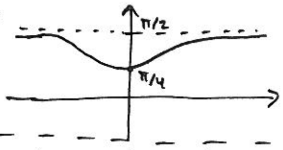
$$f(x)=\arctan(x^2+1)\to\frac{\pi}{2} \quad \text{då } x\to\pm\infty$$

(eftersom $x^2+1\to\infty$ då $x\to\pm\infty$)

Detta är samma sak som att säga att

$$f(x)-\frac{\pi}{2}\to 0 \quad \text{då } x\to\pm\infty.$$

Slutsats: $y=\frac{\pi}{2}$ är en (sned) asymptot både då $x\to\infty$ och $x\to-\infty$



I Exemplen ovan kunde vi "lista" ut" asymptoterna:

Allmän metod (t.ex. fallet $x\to\infty$):

A) Beräkna $k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

B) Beräkna $m=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)$

Om båda gränsvärdena existerar (ändligt) så har kurvan $y=f(x)$ asymptoten $y=kx+m$ då $x\to\infty$. Om något gr.värde ej exist. $\Rightarrow$ asympt. saknas

(6)

Ex (igen): $f(x)=\frac{x^2-3}{x+2}$. Asymptot?

• $$\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2-3}{x^2+2x}=\underbrace{\frac{x^2}{x^2}}_{=1}\cdot\frac{1-\overbrace{\frac{3}{x^2}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}}\to 1=k \quad \text{då } x\to\pm\infty$$

• $$f(x)-kx=f(x)-1\cdot x=\frac{x^2-3}{x+2}-x=$$

$$=\frac{x^2-3-x(x+2)}{x+2}=\frac{x^2-3-x^2-2x}{x+2}=$$

$$=\frac{-2x-3}{x+2}=\underbrace{\frac{x}{x}}_{=1}\cdot\frac{-2-\overbrace{\frac{3}{x}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}}\to \underbrace{-2}_{m} \quad \text{då } x\to\pm\infty$$

Slutsats: $y=x-2$ asymptot både då $x\to\infty$ och $x\to-\infty$.

Ex: $f(x)=e^x$. Asymptot? I fallet $x\to\infty$ får vi

• $\frac{f(x)}{x}=\frac{e^x}{x}\to\infty$ då $x\to\infty$

Asymptot saknas då $x\to\infty$.

I fallet $x\to-\infty$ får vi däremot

• $\frac{f(x)}{x}=\frac{e^x}{x}\to\text{"}\frac{0}{-\infty}\text{"}=0=k$ då $x\to-\infty$

• $f(x)-0\cdot x=e^x\to 0=m$ då $x\to-\infty$

(7)

Vi har alltså asymptoten $y=0$ då $x\to-\infty$

Ex: Skissera grafen till $f(x)=\frac{x+4}{|x|+2}$!

Ange ev. lokala extrempunkter samt asymptoter.

Lösning: 1) $$f(x)=\begin{cases}\frac{x+4}{x+2} & \text{då } x\geq 0\\ \frac{x+4}{-x+2} & \text{då } x<0\end{cases}$$ (OBS! ej $\geq$)

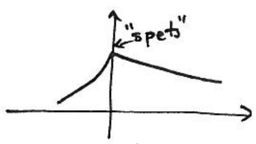
$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{1\cdot(x+2)-1\cdot(x+4)}{(x+2)^2}=\frac{-2}{(x+2)^2}, & x>0\\ \frac{1\cdot(-x+2)-(-1)\cdot(x+4)}{(-x+2)^2}=\frac{6}{(-x+2)^2}, & x<0\end{cases}$$

Vi måste kolla "skarven" separat:

Högerderivata: $f'(x)=\frac{-2}{(x+2)^2}\to-\frac{1}{2}$ då $x\to 0^+$

Vänsterderivata: $f'(x)=\frac{6}{(-x+2)^2}\to\frac{3}{2}$ då $x\to 0^-$

$\Rightarrow$ f ej deriverbar i $x=0$!



För övrigt ser vi att f' saknar nollställen!

2) Teckenschema! Enda intressanta punkt är $x=0$ där f' ej existerar:

(8)

		0	
$f'(x)$	+	∄	−
$f(x)$	↗	2	↘
		lok.max	

3) Gränsvärden då $x\to\pm\infty$:

$$f(x)=\begin{cases}\underbrace{\frac{x+4}{x+2}}_{x\geq 0}=\frac{1+\frac{4}{x}}{1+\frac{2}{x}}\to 1 & \text{då } x\to\infty\\ \underbrace{\frac{x+4}{-x+2}}_{x<0}=\frac{1+\frac{4}{x}}{-1+\frac{2}{x}}\to -1 & \text{då } x\to-\infty\end{cases}$$

Asymptoter? Gr.värdesber. ovan ger att $y=1$ asymptot då $x\to\infty$ och att $y=-1$ — " — $x\to-\infty$.

4)