Föreläsning 13

Allmänna polynomekvationer

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

[redacted] a_i komplexa koeff.

Ex: $p(z) = z^2 + 2iz + 8$ har nollstället $z = 2i$

Faktorisera $p(z)$!

Lösning: $z = 2i$ nollställe $\xRightarrow{\text{Faktorsatsen}}$ $z - 2i$ delar $p(z)$

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{1}{l}{z + 4i} & \\ \hline z^2 + 2iz + 8 & z - 2i \\ \cline{2-2} -(z^2 - 2iz) & \\ \hline 4iz + 8 & \\ -(4iz + 8) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow p(z) = (z - 2i)(z + 4i)$

[Alt. lösn: Lös ekv. med metoden från förra föreläsningen]

Vi ser att det andra nollstället är $z = -4i$.

Ex: Polynomet $p(z) = z^2 + 1$ saknar reella nollställen. Däremot har det komplexa:

$$z^2 + 1 = 0 \iff z^2 = -1 \iff z = \pm i$$

Från faktorsatsen följer det att $p(z) = (z - i)(z + i)$

$$\boxed{\text{Nollställen} \xleftrightarrow{\text{F.satsen}} \text{Faktorisering}}$$

Sats (Algebrans fundamentalsats)

Varje polynom $p(z)$ $(\deg p(z) \geq 1)$ har minst ett komplext nollställe.

Bevis: Inte i denna kursen!

Sats: Låt $p(z)$ vara ett polynom av grad n, dvs.

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Då har $p(z)$ precis n st. nollställen (räknat med multiplicitet), och

$$p(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_n)$$

(α_i nollställen)

Bevis: Enligt alg.-fund.-sats har $p(z)$ ett komplext nollställe α_1 $\overset{\text{F.S.}}{\Longrightarrow}$ $p(z) = (z - \alpha_1) q_1(z)$ för något polynom $q_1(z)$ med $\deg q_1(z) = n - 1$. Återigen, enligt alg. fund.sats, har $q_1(z)$ ett nollställe α_2

$\overset{\text{F.S.}}{\Longrightarrow}$ $p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) q_2(z)$ där grad $q_2(z) = n - 2$

Fortsätt på detta vis . . . . . .

$\Rightarrow p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_n) \cdot C$ ← grad 0, dvs. konstant

Vi inser att $C = a_n$ och satsen är visad $\square$

Ex: Hur många rötter (räknat med multiplicitet) har ekvationen

$$p(z) = (z^3 + 14i)^8 - (z^2 + i)^{12} = 0 \quad ?$$

Lösning: Binomialsatsen ger

$$(z^3 + 14i)^8 = \underbrace{(z^3)^8}_{= z^{24}} + \underbrace{\binom{8}{1}(z^3)^7}_{= z^{21}} \cdot 14i + \cdots$$

$$(z^2 + i)^{12} = \underbrace{(z^2)^{12}}_{= z^{24}} + \underbrace{\binom{12}{1}(z^2)^{11}}_{= z^{22}} \cdot i + \cdots$$

z^{24}-termerna tar ut varandra $\Rightarrow \deg p(z) = 22$

$\Rightarrow$ ekv. har 22 rötter.

Sats: Låt $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ vara polynom med reella koefficienter a_i.

Då gäller att om $\alpha = a + bi$ $(b \neq 0)$ är ett nollställe till $p(z)$, så är konjugatet $\bar{\alpha} = a - bi$ också det, dvs. $p(a + bi) = 0 \Rightarrow p(a - bi) = 0$.

Annorlunda uttryckt, för ett reellt polynom så förekommer alltid icke-reella nollställen i par med sitt konjugat.

Ex: Polynomet $p(z) = z^4 - 2z^3 + 7z^2 + 18z + 26$ har reella koefficienter. Vi får veta på att $z = -1 + i$ är ett nollställe (kolla!). Lös ekv. $p(z) = 0$ fullständigt!

Lösning: Reella koeff. $\Rightarrow$ $\bar{z} = -1 - i$ nollställe

Faktorsatsen ger att

$$(z - (-1 + i))(z - (-1 - i)) = z^2 + 2z + 2$$

delar $p(z)$. Polynomdivision ger nu

$$p(z) = (z^2 + 2z + 2)(z^2 - 4z + 13)$$

Slutligen, $z^2 - 4z + 13 = 0 \iff z = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm \sqrt{-9}$

$\iff z = 2 \pm 3i$ (OBS! Även dessa nollställen är i par!)

Svar: Rötterna är $z = -1 \pm i$ och $z = 2 \pm 3i$

Bevis för satsen: (Låt $\alpha = a + bi$. Detta betyder att $\bar{\alpha} = a - bi$)

Antag att $p(\alpha) = 0$. Då följer att

$$\begin{aligned} p(\bar{\alpha}) &= a_n \bar{\alpha}^n + a_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{\alpha} + a_0 = \\ &= a_n \overline{\alpha^n} + a_{n-1} \overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + a_1 \bar{\alpha} + a_0 = \\ &= \overline{a_n}\, \overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}}\, \overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1}\, \bar{\alpha} + \overline{a_0} = \\ &= \overline{a_n \alpha^n} + \overline{a_{n-1} \alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 \alpha} + \overline{a_0} = \\ &= \overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0} = \\ &= \overline{p(\alpha)} = \bar{0} = 0 \end{aligned}$$

a_i reell $\Rightarrow \bar{a_i} = a_i$

$\square$

Faktorisering i reella faktorer

(5)

Ex: Faktorisera $p(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$ så långt som möjligt i reella faktorer.

Lsg: Vi gissar nollstället $x=1$ och faktorsatsen ger att $x-1$ delar $p(x)$. Pol.division ger

$$p(x) = (x-1)(x^2+4)$$

Nu kan vi inte fortsätta längre. Enda möjligheten hade varit att faktorisera x^2+4 i icke-reella faktorer:

$$p(x) = (x-1)(x+2i)(x-2i),$$

men det var vi inte ute efter.

Svar: $p(x) = (x-1)(x^2+4)$

Ex: Faktorisera $p(z) = z^4 - 2z^3 + 7z^2 + 18z + 26$ så långt som möjligt i reella faktorer

Lösning: Enligt ovan har $p(z)$ nollställena

$z = -1 \pm i$ och $z = 2 \pm 3i$, vilket ger

$$p(z) = \big(z-(-1+i)\big)\big(z-(-1-i)\big)\big(z-(2+3i)\big)\big(z-(2-3i)\big)$$

Mult. ihop parenteserna parvis (med "sina konjugat")

$$(z-(-1+i))(z-(-1-i)) = z^2+2z+2$$

$$(z-(2+3i))(z-(2-3i)) = z^2-4z+13$$

så $p(z) = (z^2+2z+2)(z^2-4z+13)$ [Jfr. ex. ovan!]

(6)

Sats: Varje reellt polynom (dvs. med reella koeff.) av grad ≥ 1 kan faktoriseras i reella 1:a- och 2:a-gradsfaktorer.

Bevis ("skiss"): Faktorisera först i komplexa förstagradsfaktorer. Icke-reella nollställen förekommer i par med sina konjugat – para ihop och multiplicera motsvarande parenteser – dessa blir då reella andragradsfaktorer. □

Komplexvärda funktioner

En komplexvärd funktion f är en funktion av typen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ och skrivs allmänt

$$\boxed{f(x) = g(x) + ih(x), \qquad x \in \mathbb{R}.}$$

Ex: $f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Vi definierar derivatan av en sådan funktion via

$$\boxed{f'(x) = g'(x) + ih'(x)}$$

(7)

Ex: $f(x) = e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$$\Rightarrow f'(x) = -\sin x + i\cos x =$$

$$= i(i\sin x + \cos x) = i(\cos x + i\sin x)$$

$$= ie^{ix}$$

Derivata fungerar som för exp.funktion med i som inre derivata!

- - - - - - - - - - - - - - - -

Går det att definiera e^z för godtyckliga komplexa tal z?

– Ja, sätter vi $z = a+bi$ så definieras e^z genom

$$\underline{\underline{e^z}} = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{ib} = \underline{\underline{e^a(\cos b + i\sin b)}}$$

Ex: Beräkna $\mathrm{Im}\left(e^{2+i\frac{\pi}{6}}\right)$.

Lösning: $e^{2+i\frac{\pi}{6}} = e^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = e^2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$

$$= e^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{e^2\sqrt{3}}{2} + \frac{e^2}{2}i$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\left(e^{2+i\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{e^2}{2}. \qquad \square$$

(8)

Ex: Derivera funktionen

$$f(x) = e^{(a+bi)x}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$a+bi$ konstant

Lösning:

$$f(x) = e^{(a+bi)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} \left(= e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)\right)$$

Vi får (produktregeln)

$$f'(x) = ae^{ax} \cdot e^{ibx} + e^{ax} \cdot ibe^{ibx} =$$

$$= (a+bi)e^{ax} \cdot e^{ibx} = (a+bi)e^{(a+bi)x}$$

Här är $a+bi$ inre derivata!