(1)

Föreläsning 1

Gränsvärde då $x \to \infty$:

Vad händer med funktionen

$$f(x) = \frac{x}{2x+1} \quad \text{för stora } x\,?$$

Då x stort är $\dfrac{x}{2x+1} \approx \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$. Funktionen $f(x)$ borde närma sig värdet $1/2$ då x blir stort.

I själva verket kan $f(x)$ komma godtyckligt nära $1/2$ bara x är tillräckligt stort.

Def ($f(x) \to A$ då $x \to \infty$): Låt A vara ett tal.

Vi skriver $f(x) \to A$ då $x \to \infty$ (alt. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$) om det för varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal ω_ε sådant att

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{för alla } x > \omega_\varepsilon$$

(dvs. $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ för alla $x > \omega_\varepsilon$)

Ex: Vi försöker visa att $f(x) = \dfrac{x}{2x+1} \to \dfrac{1}{2}$ då $x \to \infty$. Välj därför ett $\varepsilon > 0$.

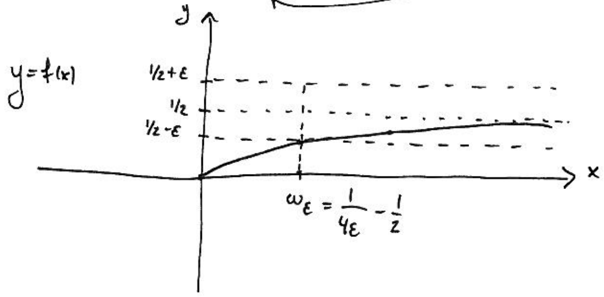
(2)

$$\left|\frac{x}{2x+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2x-(2x+1)}{2(2x+1)}\right| = \left|\frac{-1}{2(2x+1)}\right| =$$

$$= \frac{1}{|4x+2|} < \varepsilon \iff |4x+2| > \frac{1}{\varepsilon}$$

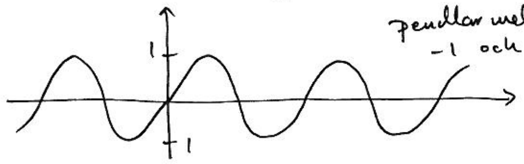
$$\iff 4x+2 > \frac{1}{\varepsilon} \quad \left(\text{eller } 4x+2 < -\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

dvs. $x > \dfrac{1}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2} = \omega_\varepsilon$ stort då ε litet.



Slutsats: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x+1} = \dfrac{1}{2}$.

Ex: $f(x) = \sin x$ saknar gränsvärde då $x \to \infty$.

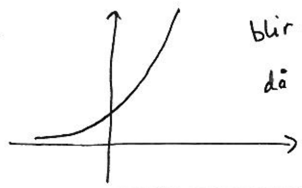


pendlar mellan -1 och 1.

(3)

Oegentliga gränsvärden då $x \to \infty$:

$f(x) = e^x$



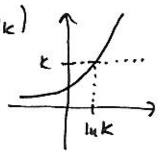
blir godtyckligt stor då x tillräckligt stor

Def ($f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$):

Vi skriver $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ (alt. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$) om det för varje tal K finns ett tal ω_K sådant att $f(x) > K$ för alla $x > \omega_K$

Ex: $f(x) = e^x \to \infty$ då $x \to \infty$ eftersom

$$e^x > K \quad \text{då} \quad x > \ln K \; (= \omega_K)$$



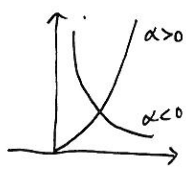
Anm: Vi kan på motsvarande sätt definiera gr.värden $f(x) \to A$ och $f(x) \to \infty$ då $x \to -\infty$. (Vi kan även def. det oegentliga gränsvärdet $-\infty$.)

Problem: Vi kan inte hela tiden gå tillbaka till definitionen för att bestämma gränsvärden.

(4)

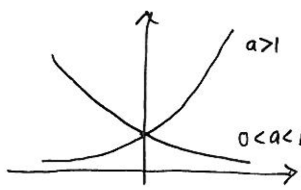
Lösning:
- Visa ett antal standardgränsvärden som vi fritt kan referera till
- Visa ett antal räkneregler för gränsvärden.

Standardgränsvärden (elementära funktioner):



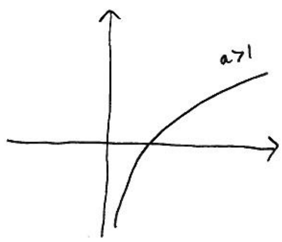
$$x^\alpha \to \begin{cases} \infty & \text{om } \alpha > 0 \\ 0 & \text{om } \alpha < 0 \end{cases}$$

då $x \to \infty$

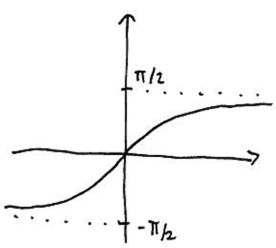


$$a^x \to \begin{cases} \infty & \text{om } a > 1 \\ 0 & \text{om } 0 < a < 1 \end{cases}$$

då $x \to \infty$



${}^a\log x \to \infty$ då $x \to \infty$



$$\arctan x \to \begin{cases} \pi/2 & \text{då } x \to \infty \\ -\pi/2 & \text{då } x \to -\infty \end{cases}$$

Ex: $\frac{1}{x} \to 0$ då $x \to \infty$, $\ln x \to \infty$ då $x \to \infty$ (5) □

Ex: Beräkna $\lim_{x \to -\infty} 3^x$.

$$\lim_{x\to -\infty} 3^x = \left[\begin{matrix} t=-x \iff x=-t \\ x\to-\infty \iff t\to\infty \end{matrix}\right] = \lim_{t\to\infty} 3^{-t} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^t = 0$$ □

Räkneregler för gränsvärden:

Sats: Låt A och B vara tal.

Om $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ och $\lim_{x\to\infty} g(x) = B$, så är

$$\lim_{x\to\infty} (f(x)+g(x)) = A+B$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (\text{om } B \neq 0)$$

Ex: $3\arctan x - \frac{x}{2x+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x \longrightarrow$

$$\longrightarrow 3\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{3\pi}{2} \quad \text{då } x\to\infty.$$

Anm: Det finns en motsvarande räkneregel för sammansättning.

Räknereglerna fungerar även då $A = \pm\infty$ i vissa fall (6)

Ex: $2^x\cdot\ln x + \frac{x}{2x+1} \to "\infty\cdot\infty + \frac{1}{2}" = \infty$ då $x\to\infty$.

Vissa formella räkningar "..." kan vi inte hantera (= farliga fall)

Ex: Beräkna $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-2x+1}{3x^3+x}$

$$\frac{2x^3-2x+1}{3x^3+x} \to "\frac{\infty}{\infty}"$$ fungerar ej – farligt fall

Bryt ut täljarens respektive nämnarens dominerande term:

$$\frac{2x^3-2x+1}{3x^3+x} = \underbrace{\frac{x^3}{x^3}}_{1=}\cdot\frac{2-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3+\frac{1}{x^2}} \to \frac{2-0+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$ då $x\to\infty$. □

Ex: Beräkna $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$!

Av typ "$\infty-\infty$" (ett annat farligt fall).

Förläng med konjugatuttrycket:

$$\sqrt{x^2-x}-x = \frac{(\sqrt{x^2-x}-x)(\sqrt{x^2-x}+x)}{\sqrt{x^2-x}+x} = \frac{(x^2-x)-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x} =$$

(7)

$$= \frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} = \underbrace{\frac{x}{x}}_{1=}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1} \to \frac{-1}{\sqrt{1-0}+1} = -\frac{1}{2}$$ då $x\to\infty$

Hur bestämmer man "dominerande term" om funktionerna är av olika typ?

Sats:

i) $\frac{{}^a\log x}{x^\alpha} \to 0$ då $x\to\infty$

ii) $\frac{x^\alpha}{a^x} \to 0$ då $x\to\infty$

långsammast ⟷ snabbast

log. funk. potensfunk. exp. funk.

Ex: Beräkna $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x+x^4+\ln x}{3^x+x^3\ln x}$! "$\frac{\infty}{\infty}$"

Bryt ut dominerande termer:

$$\frac{2^x+x^4+\ln x}{3^x+x^3\ln x} = \frac{2^x}{3^x}\cdot\frac{1+\frac{x^4}{2^x}+\frac{\ln x}{2^x}}{1+\frac{x^3\ln x}{3^x}} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^x}_{\to 0}\cdot\frac{1+\underbrace{\frac{x^4}{2^x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{\ln x}{2^x}}_{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{x^3}{(\sqrt{3})^x}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{\ln x}{(\sqrt{3})^x}}_{\to 0}} \to 0\cdot\frac{1+0+0}{1+0\cdot 0} = \underline{\underline{0}}$$ då $x\to\infty$

Jämförelsesatser: (8)

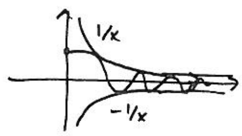
Ex: Beräkna $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$! (Vi kan anta att $x>0$)

Eftersom $-1\le\sin x\le 1$, så är

$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\to 0} \le \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 0} \le \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}$$

Funktionen $\frac{\sin x}{x}$ är "inklämd" mellan två funktioner som båda går mot 0.

Slutsats: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$.



Definition av talet e:

Def (Talet e):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Anm: Farligt fall "1^∞".

Anm2: Det går att visa att även $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (!)

$e \approx 2.71828\ldots\ldots$

OBS! $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to (1+0)^x = 1^x \to 1$ då $x\to\infty$

ej tillåtet. "Stegvis" gränsövergång.