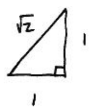
Föreläsning 11:

1

Komplexa tal - bakgrund

Ekvation	Talsystem	
I) $x+2=5 \iff x=3$	Naturliga tal $0,1,2,3,4,\ldots$	$\mathbb{N}$
II) $x+3=1 \iff x=-2$	Heltal $0,\pm1,\pm2,\ldots$	$\mathbb{Z}$
III) $3x=5 \iff x=\frac{5}{3}$	Rationella tal $\frac{a}{b}$, a,b heltal	$\mathbb{Q}$
IV) $x^2=2 \iff x=\pm\sqrt{2}$	Irrationella tal	



Rationella tal + Irrationella tal = Reella tal $\mathbb{R}$

Komplexa tal

Fråga: Hur ska vi bära oss åt för att lösa ekvationen

$$x^2=-1 \ ?$$

2

Vi inför en s.k. imaginär enhet i, med egenskapen $i^2=-1$. Detta ger $x^2=-1 \iff x=\pm i$

Vi kan nu lösa alla reella andragradsekvationer:

Ex: $x^2+2x+5=0 \iff x=-1\pm\sqrt{(-1)^2-5}$

$\iff x=-1\pm$ "$\sqrt{-4}$"

Hur ska vi tolka "$\sqrt{-4}$"? Eftersom $(2i)^2=4i^2=-4$ får vi $x^2+2x+5=0 \iff x=-1\pm 2i$

Anm: i fungerar som "$\sqrt{-1}$", men "$\sqrt{-1}$" är farligt (= förbjudet) att använda. T.ex. får vi

$$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=i\cdot i=-1$$

Definition: Ett tal $a+bi$ (a,b reella) kallas komplext ($\mathbb{C}$)

Räkneregler: Samma som för vanliga reella tal, men varje förekomst av i^2 byts ut mot -1.

Ex: a) $(2-3i)+(\frac{7}{2}+11i)=(2+\frac{7}{2})+(-3+11)i=\frac{11}{2}+8i$

b) $(\sqrt{2}-6i)(1+2i)=\sqrt{2}+2\sqrt{2}i-6i-12\overset{=-1}{i^2}=$
$=(\sqrt{2}+12)+(2\sqrt{2}-6)i$

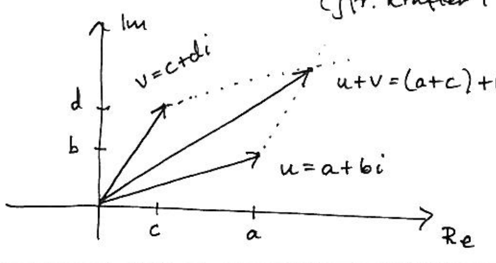
3

Def: Om $z=a+bi$ är ett komplext tal så kallas
a realdelen av z ($\mathrm{Re}(z)=a$), och
b imaginärdelen av z ($\mathrm{Im}(z)=b$)

OBS! $\mathrm{Im}(z)\neq b\cdot i$

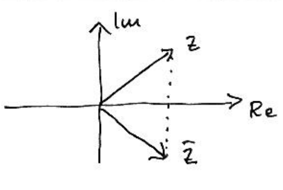
- Komplexa tal $\longleftrightarrow$ punkter (vektorer) i komplexa talplanet

Addition av komplexa tal $\longleftrightarrow$ vektoraddition (jfr. krafter i fysiken)



Def: Konjugatet av $z=a+bi$ definieras som
$$\bar{z}=a-bi$$

Illustration:



spegling!

4

Ex: Lös ekvationen $2z-i\bar{z}=1+4i$.

Sätt $z=a+bi$. Detta ger $\bar{z}=a-bi$. Vi får

$2(a+bi)-i(a-bi)=1+4i \iff$

$2a+2bi-ai+b\underbrace{i^2}_{=-1}=1+4i \iff$

$(2a-b)+(-a+2b)i=1+4i \iff$

[Två komplexa tal är lika då realdelar och imaginärdelar är lika.]

$$\begin{cases} 2a-b=1 & (1) \\ -a+2b=4 & (2) \end{cases}$$

(2): $-a+2b=4$ ger $a=2b-4$. Sätt in i ekv. (1)!

Vi får $2a-b=1 \iff 2(2b-4)-b=1 \iff b=3$

Insättning i t.ex. (2) ger att $a=2$.

Svar: $z=a+bi=2+3i$

Sats: (i) $\overline{\overline{z}}=z$ (ii) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$
(iii) $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$

Bevis: Kolla själv!

Division med komplexa tal:

Vi förlänger med konjugatet till nämnaren:

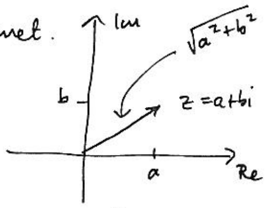
Ex: $\dfrac{3+i}{2-3i} = \dfrac{(3+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{6+9i+2i+3\overset{=-1}{i^2}}{4-9\underset{=-1}{i^2}} =$

konj.regeln

$= \dfrac{3+11i}{13} = \dfrac{3}{13} + \dfrac{11}{13} i$

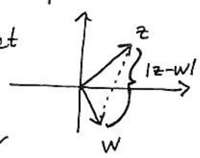
Def: Absolutbeloppet av $z=a+bi$ är
$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Absolutbeloppet anger avståndet från z till origo i komplexa talplanet.



På motsvarande sätt

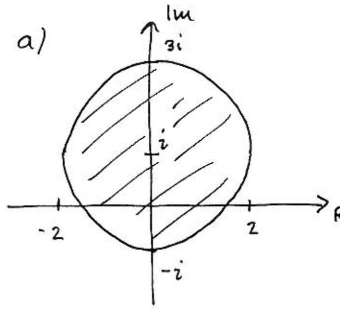
$|z-w|$ = avståndet mellan z och w i komplexa talplanet



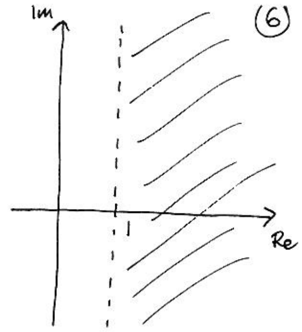
Ex: Rita alla z som uppfyller

a) $|z-i| \le 2$ b) $\text{Re}(z) > 1$.

a)



b)



(randen ingår ej)

Sats: (i) $|z|^2 = z\bar{z}$ (ii) $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$

(iii) $|z+w| \le |z|+|w|$ (iv) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$

(v) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

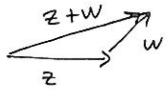
Bevis: (i) $z=a+bi \Rightarrow \begin{cases} z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2-b^2i^2 = a^2+b^2 \\ |z|^2 = (\sqrt{a^2+b^2})^2 = a^2+b^2 \end{cases}$

(ii) $|z\cdot w|^2 = (z\cdot w)\cdot(\overline{z\cdot w}) = z\cdot w\cdot \bar{z}\cdot\bar{w} =$

$= z\cdot\bar{z}\cdot w\cdot\bar{w} = |z|^2\cdot|w|^2 = (|z|\cdot|w|)^2$

$\Rightarrow |z\cdot w| = |z|\cdot|w|$

(iii)



$|z+w| \le |z|+|w|$

Kallas triangelolikheten

(iv), (v) Läs själva!

Ex: Beräkna absolutbeloppet av
$$z = \frac{(1+i)^{100}(3-4i)^2}{(2+2i)^5}.$$

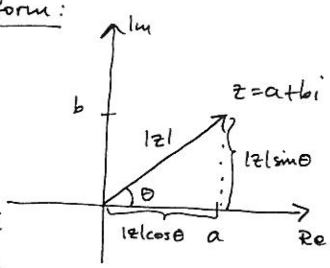
$$|z| = \left|\frac{(1+i)^{100}(3-4i)^2}{(2+2i)^5}\right| = \frac{|(1+i)^{100}|\cdot|(3-4i)^2|}{|(2+2i)^5|} =$$

$$= \frac{|1+i|^{100}\cdot|3-4i|^2}{|2+2i|^5} = \frac{(\sqrt{1^2+1^2})^{100}\cdot(\sqrt{3^2+(-4)^2})^2}{(\sqrt{2^2+2^2})^5} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^{100}\cdot 5^2}{(\sqrt{8})^5} = \frac{2^{50}\cdot 5^2}{8^2\cdot\sqrt{8}} = \frac{2^{43}}{\sqrt{2}}\cdot 25.$$

Komplexa tal på polär form:

Låt $z=a+bi$. Då $|z|$ är avst. till origo får vi (se figur!)



$z = a+bi = |z|\cos\theta + |z|\sin\theta\cdot i$

$= |z|(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$

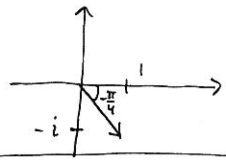
Vinkeln θ kallas argumentet av z ($\theta = \arg z$)

(Observera att argumentet ej är entydigt bestämt, kan väljas $+2\pi k$)

Ex: $z = 1-i$ $\begin{cases} |z| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \arg z = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \text{ heltal} \end{cases}$

Detta ger

$z = 1-i = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$



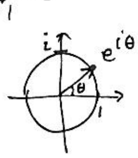
Def: Vi definierar $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $(\theta\in\mathbb{R})$.
Ett komplext tal kan då alltid skrivas på s.k. polär form $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}$

Ex: $z = 1-i = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right) =$

$= \sqrt{2}\, e^{i(-\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Ex: $|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1}} = \sqrt{1} = 1$

Det komplexa talet $e^{i\theta}$ ligger alltid på enhetscirkeln i komplexa talplanet!



Fråga: Varför beteckningen $e^{i\theta}$?

— Svar, nästa föreläsning.