Föreläsning 3: (1)

Exempel på gränsvärdesräkningar (spec. fallet "0/0"):

Ex: Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$! $\left(\text{"}\frac{0}{0}\text{"}\right)$

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \frac{1}{\cos x} \to 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = \underline{\underline{1}}$$

då $x \to 0$.

Ex: Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$! $\left(\text{"}\frac{0}{0}\text{"}\right)$

$$\frac{\ln(1+\sin x)}{x} = \underbrace{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}}_{1\ *)} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \to 1 \cdot 1 = \underline{\underline{1}} \text{ då } x \to 0$$

$$*) \quad \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ t = \sin x \to \sin 0 = 0 \text{ då } x \to 0 \end{bmatrix} = \frac{\ln(1+t)}{t} \to 1 \text{ då } t \to 0.$$

Ex: Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\arcsin x}$! $\left(\text{"}\frac{0}{0}\text{"}\right)$

$$\frac{\tan 2x}{\arcsin x} = \underbrace{\frac{\tan 2x}{2x}}_{1 \text{ (gör som i första exemplet)}} \cdot \overbrace{\frac{x}{\arcsin x}}^{*)\ 1} \cdot 2 \to 1 \cdot 1 \cdot 2 = \underline{\underline{2}}$$

då $x \to 0$

$$*) \quad \frac{x}{\arcsin x} = \begin{bmatrix} t = \arcsin x \iff x = \sin t,\ -\pi/2 < t < \pi/2 \\ t = \arcsin x \to \arcsin 0 = 0 \text{ då } x \to 0 \end{bmatrix} = \frac{\sin t}{t} \to 1 \text{ då } t \to 0$$

Ex: Beräkna $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2}$! $\left(\text{"}\frac{0}{0}\text{"}\right)$

Vi faktoriserar x^2-x-2: $x^2-x-2=0 \iff \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$ (eller)

$$\frac{x-2}{x^2-x-2} = \frac{x-2}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x+1} \to \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

då $x \to 0$.

Ex: Beräkna $\lim_{x\to 1} \frac{e \ln x}{e^x - e}$! $\left(\text{"}\frac{0}{0}\text{"}\right)$

Gränsövergång $x \to 1$ ställer till problem. Vi fixar med ett lämpligt variabelbyte till gränsövergång mot 0:

$$\frac{e \ln x}{e^x - e} = \begin{bmatrix} t = x-1 \iff x = 1+t \\ x \to 1 \iff t \to 0 \end{bmatrix} = \frac{e \ln(1+t)}{e^{1+t} - e} =$$

$$= \underbrace{\frac{e}{e}}_{1} \cdot \frac{\ln(1+t)}{e^t - 1} = \frac{\ln(1+t)}{t} \cdot \frac{t}{e^t - 1} =$$

$$= \underbrace{\frac{\ln(1+t)}{t}}_{1} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{e^t-1}{t}}_{\to 1}} \to 1 \cdot \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}} \text{ då } t \to 0.$$

(3)

Alt. Beräkna $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2}$!

$$\frac{x-2}{x^2-x-2} = \begin{bmatrix} t = x-2 \iff x = t+2 \\ x \to 2 \iff t \to 0 \end{bmatrix} = \frac{t}{(t+2)^2-(t+2)-2} =$$

$$= \frac{t}{t^2+4t+4-t-2-2} = \frac{t}{t^2+3t} = \frac{1}{t+3} \cdot \overbrace{\frac{t}{t}}^{\text{"}1\text{"}} =$$

$$= \frac{1}{t+3} \to \frac{1}{0+3} = \frac{1}{3} \text{ då } t \to 0.$$

Ex: Beräkna $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{3x}\right)^x$! $\left(\text{"}1^\infty\text{"}\right)$

$$\left(1+\frac{1}{3x}\right)^x = \begin{bmatrix} t = 3x \iff x = \frac{t}{3} \\ x \to \infty \iff t \to \infty \end{bmatrix} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t/3} =$$

$$= \Big(\underbrace{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}_{\to e}\Big)^{1/3} \to \underline{\underline{e^{1/3}}} \text{ då } t \to \infty.$$

Ex: Beräkna $\lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$! $\left(\text{"}1^{-\infty}\text{"}\right)$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \begin{bmatrix} t = -x \iff x = -t \\ x \to -\infty \iff t \to \infty \end{bmatrix} = \left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} =$$

$$= \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \left(\frac{(t-1)+1}{t-1}\right)^t =$$

$$= \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t = \begin{bmatrix} s = t-1 \iff t = s+1 \\ t \to \infty \iff s \to \infty \end{bmatrix} =$$

(4)

$$= \left(1+\frac{1}{s}\right)^{s+1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{s}\right)^s}_{e} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{s}\right)}_{1+0=1} \to e \cdot 1 = \underline{\underline{e}}$$

då $s \to \infty$.

Anm (Beteckning):

Alt. 1: $\frac{\sin 3x}{4x} = \blacksquare = \blacksquare = \blacksquare = \blacksquare \to \frac{3}{4}$ då $x \to 0$

Alt. 2: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x} = \lim_{x\to 0} \blacksquare = \lim_{x\to 0} \blacksquare = \lim_{x\to 0} \blacksquare = \frac{3}{4}$

Fallet "$\frac{1}{0}$": Tolkas (oftast) som $\pm\infty$, beroende på tecken.

Ex: Beräkna de ensidiga gr.värdena $x \to 0^+$, $x \to 0^-$, $x \to -1^+$, $x \to -1^-$ av

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)} \text{ !}$$

$$\frac{1}{x(x+1)} \to \begin{cases} \text{"}\frac{1}{0^+ \cdot 1}\text{"} = \infty & \text{då } x \to 0^+ \\ \text{"}\frac{1}{0^- \cdot 1}\text{"} = -\infty & \text{då } x \to 0^- \end{cases}$$

$$\frac{1}{x(x+1)} \to \begin{cases} \text{"}\frac{1}{(-1) \cdot 0^+}\text{"} = -\infty & \text{då } x \to -1^+ \\ \text{"}\frac{1}{(-1) \cdot 0^-}\text{"} = \infty & \text{då } x \to -1^- \end{cases}$$

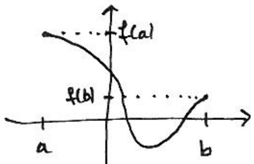
Egenskaper hos kontinuerliga funktioner:

Repetition: f är kontinuerlig i a om

$f(x) \to f(a)$ då $x \to a$.

Sats: Om f kontinuerlig i intervallet $a \le x \le b$ (slutet, begränsat intervall) så gäller

A) f antar varje värde mellan f(a) och f(b) i intervallet [a,b]

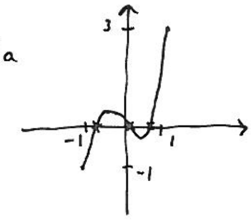


B) f antar ett största och minsta värde i [a,b].

Ex: Visa att $3x^3 - x + 1 = 0$ har en rot i intervallet [-1,1]!

Lösning: $f(x) = 3x^3 - x + 1$ är kontinuerlig i [-1,1] och $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$.

Enligt A) ovan antar f alla värden mellan -1 och 3 i intervallet $\Rightarrow f(x_0) = 0$ för något tal x_0, $-1 < x_0 < 1$.

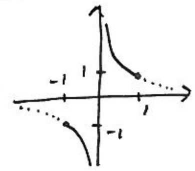


Ex: För $f(x) = \frac{1}{x}$ gäller $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$.

Men $f(x_0) \neq 0$ för alla mellanliggande punkter x_0.

A) och B) gäller ej!

Anledning: f ej def. i $x=0$, så f ej kontinuerlig i [-1,1].

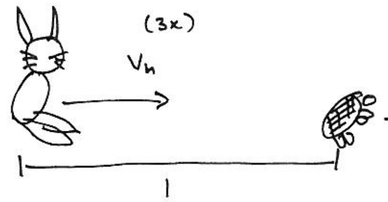


Serier = "oändliga summor":

Hare och sköldpadda kapplöper (Zenons paradox)

Haren har 3 ggr. så hög fart som sköldpaddan, men sköldpaddan har 1 km försprång.

Hur långt har haren sprungit då den hinner ifatt sköldpaddan? Efter hur lång tid?



$\boxed{s = v \cdot t}$ $\quad 1 + S_s = S_h$, där $\begin{cases} S_h = V_h \cdot t \\ S_s = V_s \cdot t \\ V_h = 3 \cdot V_s \end{cases}$

$1 + S_s = S_h \iff 1 + V_s \cdot t = V_h \cdot t$

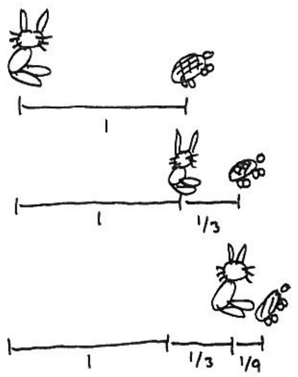
$\iff 1 + \frac{V_h}{3} t = V_h t \iff \frac{2}{3} V_h t = 1$

$\iff t = \frac{3}{2V_h}$. Detta ger $S_h = V_h \cdot t =$

$= V_h \cdot \frac{3}{2V_h} = \frac{3}{2} = \underline{\underline{1.5 \text{ km}}}$

Svar: 1.5 km resp. $\frac{3}{2V_h}$ tidsenheter.

Vi tänker på ett annat sätt:



Haren hinner aldrig ifatt sköldpaddan!

Eller?

Problem?

. . . . . . osv.

$S_h = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots \cdots = 1.5$ (?)

oändligt många termer

$t = \frac{1}{V_h} + \frac{1/3}{V_h} + \frac{1/9}{V_h} + \cdots \cdots = \frac{1.5}{V_h}$ (?)

Geometrisk summa:

$a + ax + ax^2 + \dots + ax^n =$

$= a(1 + x + x^2 + \dots + x^n) = a \cdot \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

Om $-1 < x < 1$ gäller $x^{n+1} \to 0$ då $n \to \infty$

Vi får då $a \cdot \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \to a \cdot \frac{0 - 1}{x - 1} = a \cdot \frac{1}{1 - x}$ då $n \to \infty$

Sats: Den geometriska serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} ax^k = a + ax + ax^2 + \dots$$

är konvergent (har ändligt gränsvärde) med summan $a \cdot \frac{1}{1-x}$ precis då $-1 < x < 1$.

Anm: Om serien saknar gr.värde kallas den divergent.

Ex: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots =$

$= 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

eftersom $-1 < 1/3 < 1$.