Föreläsning 2

Polynom:

Ett **polynom** är ett uttryck i obekanten x som kan skrivas på formen

$$\boxed{p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

där a_i är reella **koefficienter**.

Ex: Exempel på polynom är

$$7x^3+2x-2\,,\quad \sqrt{2}x^2-x\,,\quad x(x-1)(x+2)\,,\quad 5$$

Om $a_n \neq 0$ sägs $p(x)$ ha **grad** n. (Konstanta polynom har grad 0.)

Talet α kallas **nollställe** till $p(x)$ om $p(\alpha)=0$.

Ex: Det följer att t.ex. 1 är ett nollställe till $p(x) = x^2+8x-9$, eftersom $p(1)=1^2+8\cdot 1-9=0$.

Faktorisering:

Ex: Faktorisera x^3-9x !

$$x^3-9x = x(x^2-9) = x(x-3)(x+3)$$

konjugatregeln!

Ex: Faktorisera x^2-6x+9 !

$$x^2-6x+9 = x^2-2\cdot 3x+3^2 = (x-3)^2$$

kvadregeln!

Ex: Faktorisera $p(x)=x^2+8x-9$!

$$x^2+8x-9 = (x^2+2\cdot 4x+\underbrace{4^2)-4^2}_{=0}-9 =$$

$$= (x+4)^2-25 =$$

kallas **kvadratkomplettering** (kvadrat ± tal)

$$= \big((x+4)-5\big)\big((x+4)+5\big) = (x-1)(x+9)$$

Observation: Vilka nollställen har $p(x)$ ovan?

$$p(x) = x^2+8x-9 = (x-1)(x+9) = 0$$

$\iff$ $x-1=0$ eller $x+9=0$ $\iff$ $x=1$ eller $x=-9$.

Faktorisering av $p(x)$ ger alltså nollställen!

Även omvändningen gäller. (Faktorsatsen – senare)

$$\boxed{\text{Faktorisering} \longleftrightarrow \text{Nollställen}}$$

Rationella uttryck:

Ett **rationellt uttryck** är ett uttryck på formen

$$\frac{p(x)}{q(x)}\,,\quad p(x), q(x) \text{ polynom}$$

Ex:
$$\frac{x^2-2}{x^3+x+2}\,,\quad \frac{2x}{x^2+4}\,,\quad \frac{1}{x^2+4x+4}-\frac{1}{x-2}+\frac{x}{x^2-4}$$

Ex:
$$\frac{1}{x^2+4x+4}-\frac{1}{x-2}+\frac{x}{x^2-4} =$$

$$= \frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{x-2}+\frac{x}{(x+2)(x-2)} =$$

Faktorisera nämnare

$$= \frac{x-2}{(x+2)^2(x-2)}-\frac{(x+2)^2}{(x+2)^2(x-2)}+\frac{x(x+2)}{(x+2)^2(x-2)} =$$

MGN $=(x+2)^2(x-2)$

$$= \frac{x-2-(x+2)^2+x(x+2)}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{x-2-(x^2+4x+4)+x^2+2x}{(x+2)^2(x-2)} =$$

$$= \frac{x-2-x^2-4x-4+x^2+2x}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{-x-6}{(x+2)^2(x-2)}.$$

Förkorta gemensamma faktorer om det går:

Ex:
$$\frac{6-2x}{x^2-3x} = \frac{-2(\cancel{x-3})}{x(\cancel{x-3})} = -\frac{2}{x}.$$

Polynomdivision:

$$f(x) = x^4-3x^2+3x\,,\quad g(x) = x^2+1$$

$$x^4-3x^2+3x = x^4-3x^2+3x-x^2(x^2+1)+x^2(x^2+1) =$$

$$= -4x^2+3x+x^2(x^2+1) = -4x^2+3x+4(x^2+1)-4(x^2+1)+x^2(x^2+1) =$$

$$= 3x+4+(x^2-4)(x^2+1) = (x^2+1)\underbrace{(x^2-4)}_{\text{kvot}}+\underbrace{3x+4}_{\text{rest}}$$

alt.
$$\frac{x^4-3x^2+3x}{x^2+1} = x^2-4+\frac{3x+4}{x^2+1}$$

x^2-4 ← kvot, $3x+4$ ← rest

Sats (Polynomdivision): $f(x), g(x)$ polynom (grad $g(x) \geq 1$)

Då finns polynom $q(x), r(x)$ sådana att

$$f(x) = g(x)q(x)+r(x)\,,\quad \text{där } \operatorname{grad} r(x) < \operatorname{grad} g(x)$$

(eller $r(x)=0$)

Anm: $q(x)$ kvot, $r(x)$ rest.

Alt. ("Liggande stolen")

$$\begin{array}{rl}
x^2-4 & \leftarrow q(x) \\
\hline
x^4-3x^2+3x & \big|\; x^2+1 \\
-(x^4+x^2) & \\
\hline
-4x^2+3x & \\
-(-4x^2-4) & \\
\hline
3x+4 & \leftarrow r(x)
\end{array}$$

Går ej längre!

Sats (Faktorsatsen): Låt $f(x)$ vara polynom. Då gäller

α nollställe till $f(x)$, dvs. $f(\alpha)=0$ $\iff$ $x-\alpha$ delar $f(x)$, dvs. $f(x)=(x-\alpha)q(x)$ för något polynom $q(x)$

Bevis: (⇐) Antag att $f(x) = (x-\alpha)\,q(x)$. (5)

Då följer att $f(\alpha) = \underbrace{(\alpha-\alpha)}_{0}\,q(\alpha) = 0$ ok!

⇒) Antag $f(\alpha)=0$. Polynomdivision ger

$$f(x) = (x-\alpha)\,q(x) + r(x) \quad \text{där}$$

grad $r(x) <$ grad $(x-\alpha) = 1$. Alltså är grad $r(x)=0$,
dvs. $r(x) = C$ (konstant). Då följer

$$f(x) = (x-\alpha)\,q(x) + C.$$

Sätt $x=\alpha$. Vi får

$$f(\alpha) = \underbrace{(\alpha-\alpha)}_{0}\,q(\alpha) + C = C.$$

Men samtidigt är $f(\alpha)=0$ enl. antagandet.
Alltså gäller $C=0$, dvs. $f(x) = (x-\alpha)\,q(x)$. Klart! □

Ex: Vi har lyckats ta reda på att

$$f(x) = x^2 - 5x - 14$$

har nollställe ~~ata~~ -2. Faktorisera $f(x)$!

Koll: $f(-2) = (-2)^2 - 5(-2) - 14 = 0$ ok!

Enligt faktorsatsen så delar $x-(-2) = x+2$ polynomet $f(x)$. Polynomdivision ger

(6)

$$\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{l}{x - 7} & \\
\hline
x^2 - 5x - 14 & x+2 \\
-(x^2 + 2x) & \\
\hline
-7x - 14 & \\
-(-7x - 14) & \\
\hline
0 & \\
\end{array}$$

rest 0 som förväntat av faktorsatsen!

$$\boxed{x^2 - 5x - 14 = (x+2)(x-7)}$$

Faktorisering klar!
Vi ser att $f(x)$ har ytterligare ett nollställe, nämligen 7.

Ex: Polynomet $p(x)$ har grad 4, högstagradskoefficient -2 samt nollställena $0, 3, 2$ och -1.
Bestäm $p(x)$!

Enligt faktorsatsen har $p(x)$ faktorerna

$$x-0,\; x-3,\; x-2 \text{ och } x-(-1).$$

Vi får

$$p(x) = -2x\,(x-3)(x-2)(x+1) =$$
$$= \ldots\ldots = -2x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 12x$$

Anm: Vi återkommer till problemet att hitta nollställen till polynom i avsnittet om ekvationer (Kap 3).

Matematisk teoribyggnad: (7)

Grundstenarna i matematisk teori är (sanna) påståenden av olika slag.

Ex: Vinkelsumman i en triangel är 180°.

Matematisk teori byggs upp av

- Definitioner
- Påståenden
  - Axiom
  - Satser

Med definitioner talar man om vad olika matematiska objekt heter/betyder. T.ex. vad en vinkel respektive triangel är; vad menas med 1°? etc.

Axiom är sanna matematiska påståenden som ej behöver bevisas (dessa "tror vi på").

Satser är sanna matematiska påståenden som först måste bevisas. Bevisen konstrueras med axiomen och tidigare bevisade satser.

Teoribyggnad för plan geometri: (8)

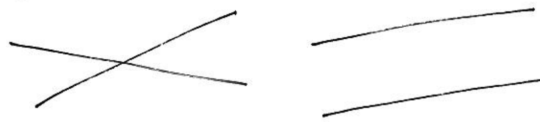
Euklides 'Elementa' ~ 300 f.kr.

Odefinierade begrepp:

• punkt

Definition 1:

- Två linjer skär varandra om de har en punkt gemensam.
- Två linjer sägs vara parallella om de inte skär varandra



Definition 2: