## Föreläsning 8

①

### Funktioner:

Vad är en funktion?

Ex: $f(x) = \sqrt{x-2}$ , $x \geq 2$

$g(x) = x^2 + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ (mängden av alla reella tal)

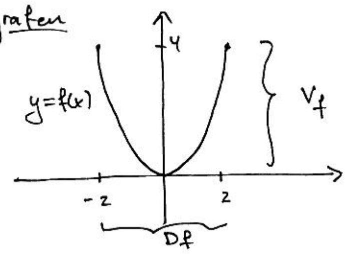
$h(x) = \sqrt{x-2}$ , $x > 5$

↑ regel ↑ definitionsmängd

> En funktion f består av en definitionsmängd $D_f$ (en delmängd av de reella talen) och en regel som avbildar varje tal x i definitionsmängden $D_f$ på precis ett tal $f(x)$.

Ex: Funktionen $f(x) = x^2$ , $-2 \leq x \leq 2$, ← regel ← def.mängd

har grafen




$D_f = [-2, 2]$

$V_f = [0, 4]$

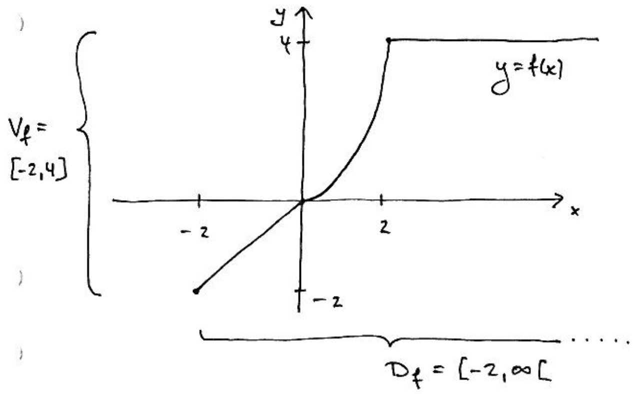
↑ OBS! Beteckning

②

> De tal som kan bildas med hjälp av f (dvs. mängden av alla värden som funktionen antar) kallas värdemängden av f (betecknas $V_f$).

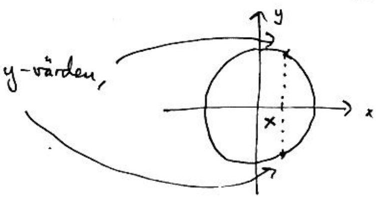
Ex: Rita grafen till funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x & -2 \leq x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 4 & x > 2 \end{cases}$$




Ex: Enhetscirkeln är ej graf ~~y=~~ f(x) till någon funktion f.

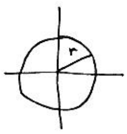
Två möjliga y-värden, går ej!




③

### Exempel på naturligt förekommande funktioner:

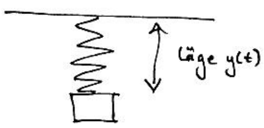
Area av en cirkel: $f(r) = \pi r^2$ , $r > 0$




Arean av en ölburk med volym 0.5 l: $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{1}{r}$ , $r > 0$


Sträcka som färdats efter tid t vid konstant fart $v_0$: $s(t) = v_0 t$ , $t \geq 0$

En svängande fjäder: (funktion av tiden t)



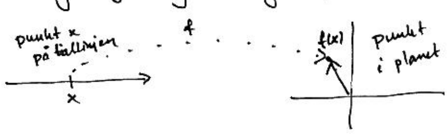

Avrinning i ett vattendrag:


---

Vi har bara nämnt funktioner av typen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

I allmänhet är en funktion av typen $A \to B$, där A och B är godtyckliga mängder, t.ex.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$




④

### Sammansatt funktion:

> Def: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ kallas sammansättningen av funktionerna g och f.

Ex: $f(x) = \sqrt{x}$ , $x \geq 0$ , $g(x) = x^2 + 1$ , $x \in \mathbb{R}$

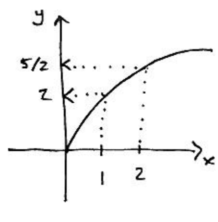
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$ , $x \geq 0$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}$ , $x \in \mathbb{R}$

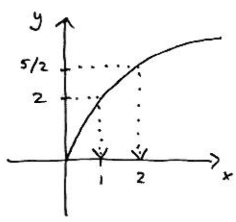
OBS! $g \circ f \neq f \circ g$. Ordning spelar roll! OBS!

### Invers funktion:

Funktion f: Invers funktion $f^{-1}$:



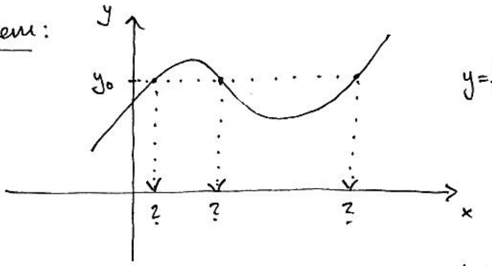

ger




$f(1) = 2$ $f^{-1}(2) = 1$

$f(2) = 5/2$ $f^{-1}(5/2) = 2$

**Problem:**



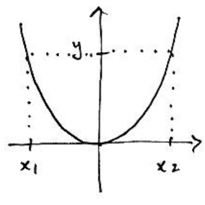

En funktion får bara ha ett värde. Här går det inte att definiera inversen $f^{-1}$.

För att inversen $f^{-1}$ ska existera måste $f$ ha följande egenskap:

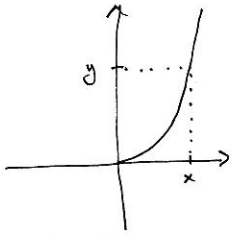
> **Def (Injektiv):** En funktion $f$ sägs vara *injektiv* (eller *omvändbar*) om det för varje $y$ i $V_f$ bara finns ett enda $x$ i $D_f$ sådant att $y=f(x)$

- Om $f$ är injektiv så existerar inversen $f^{-1}$.

Ex: a) $f(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$ b) $f(x)=x^2,\ x\geq 0$




ej injektiv




injektiv



Ex: Funktionen $f(x)=x^2,\ x\geq 0$, är injektiv

$\Rightarrow$ invers $f^{-1}$ existerar.

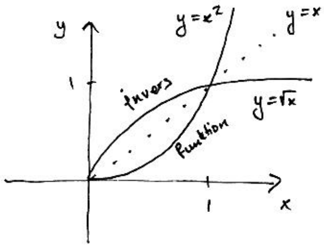
> **Frågor:** • Vilken är "formeln" för inversen?
> • Hur ser grafen till inversen ut?

**Formel:** Sätt $y=f(x)$ och lös ut $x$ uttryckt i $y$:

$$y=x^2 \iff x=\overset{+}{(-)}\sqrt{y} \qquad (\text{ty } x\geq 0)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y)=\sqrt{y},\quad y\geq 0$$

**Graf:**




Spegling i $y=x$!

D

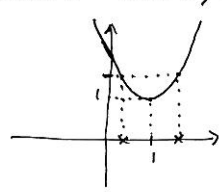
**Anm1** $D_{f^{-1}}=V_f,\ V_{f^{-1}}=D_f$

**Anm2:** $(f\circ f^{-1})(x)=x,\ (f^{-1}\circ f)(x)=x.$

Ex: Är funktionen $f(x)=x^2-2x+2,\ x\in\mathbb{R}$ injektiv?

$f(x)=(x-1)^2+1$

Oppenbart nej!






Kan vi även upptäcka detta om vi försöker beräkna inversen?

$$y=x^2-2x+2 \iff y=(x-1)^2+1 \iff y-1=(x-1)^2$$

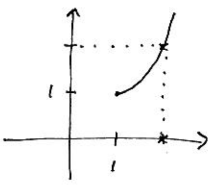
$$\iff x-1=\pm\sqrt{y-1} \iff x=1\pm\sqrt{y-1}$$

OBS!

Vi får två x-värden för samma $y$. Ej funktion.

Ex: Är funktionen $g(x)=x^2-2x+2,\ x\geq 1$, injektiv?

– Ja!



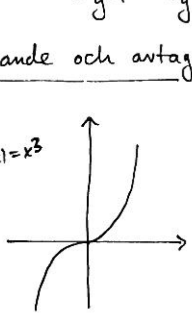

$y=x^2-2x+2$ ger $x=\overset{+}{(-)}\sqrt{y-1}$ eftersom $x\geq 1$

Vi har en invers $g^{-1}(y)=1+\sqrt{y-1},\ y\geq 1$

OBS! $D_{g^{-1}}=V_g=[1,\infty[$

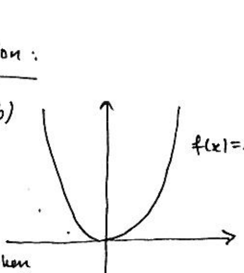
**Växande och avtagande funktion:**

a)




(strängt) växande (i $\mathbb{R}$)

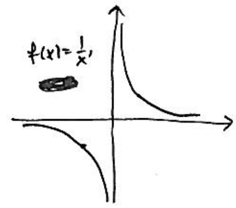
b)




varken växande eller avtagande (i $\mathbb{R}$)



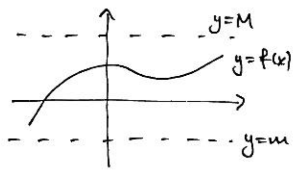
c)



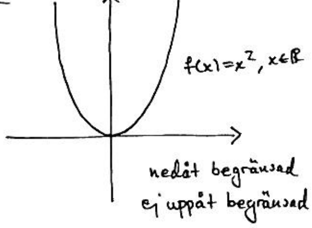

varken växande eller avtagande (för alla $x\neq 0$)

Däremot är den t.ex. (strängt) avtagande för $x>0$

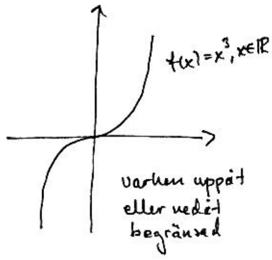
**Begränsad funktion:**




Ex:




nedåt begränsad
ej uppåt begränsad

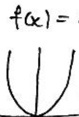



varken uppåt eller nedåt begränsad

**Jämn och udda funktion**

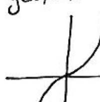
> **Def:** Funktionen $f$ kallas
> *jämn* om $f(-x)=f(x)$ för alla $x\in D_f$
> *udda* om $f(-x)=-f(x)$ –″– $D_f$

Ex: a) $f(x)=x^2$ b) $g(x)=x^3$ c) $h(x)=x^2+x$



jämn

$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$



udda

$g(-x)=(-x)^3=-x^3=-g(x)$

varken jämn eller udda,

$h(-x)=x^2-x\neq\begin{cases}h(x)\\-h(x)\end{cases}$