Föreläsning 5 (1)

Ekvationer:

Ex: Lös ekvationen $3x+3=9$!

> Anm: Att lösa ekvationen betyder, bestäm alla tal x så att påståendet blir sant.

$$3x+3=9 \iff 3x=6 \iff x=2$$

Svar: $x=2$.

> Vid ekvationslösning vill man ha ekvivalens i varje steg.

Lite exempel där "problem" uppstår:

Ex: Lös ekvationen $(2x+3)^2=(x-1)^2$!

OBS! ej ekvivalens

$$(2x+3)^2=(x-1)^2 \Leftarrow 2x+3=x-1$$

$$\iff x=-4$$

Problem! Vi "tappar" en rot. Även $x=-2/3$ är en rot, ty $(2\cdot(-2/3)+3)^2=(-4/3+3)^2=(5/3)^2=\frac{25}{9}$

och $(-2/3-1)^2=(-5/3)^2=\frac{25}{9}$

> För att få ekvivalens vid ledvis "rotutdragning" måste vi ta med "båda tecknen":

(2)

$$(2x+3)^2=(x-1)^2 \iff 2x+3=\pm(x-1)$$

$$\iff 2x+3=x-1 \text{ eller } 2x+3=-x+1$$

$$\iff x=-4 \text{ eller } 3x=-2 \iff x=-4 \text{ eller } x=-2/3$$

Svar: Rötterna är $x=-4$ och $x=-2/3$.

Ex: Lös ekvationen $\sqrt{3-x}=x-1$.

OBS! ej ekv.

$$\sqrt{3-x}=x-1 \Rightarrow 3-x=(x-1)^2$$

$$\iff 3-x=x^2-2x+1 \iff x^2-x-2=0$$

$$\overset{*)}{\iff} x=2 \text{ eller } x=-1$$

*) visas senare.

Koll: $x=2$: $\sqrt{3-2}=\sqrt{1}=1$, $2-1=1$ ok!

$x=-1$: $\sqrt{3-(-1)}=\sqrt{4}=2$, $-1-1=-2$

Falsk rot!

Svar: Den enda roten är $x=2$

Vad är felet? Felet uppstår vid kvadreringen.
($(-2)^2=2^2=4$, men $-2\neq 2$)
Vi har enbart implikation.

> När vi kvadrerar leden i en ekvation får vi ej ekvivalens, och vi måste kolla våra rötter!

(3)

Ex: Lös ekvationen $(x-1)^2=x-1$!

ej ekv.

$$(x-1)^2=x-1 \Leftarrow \frac{(x-1)^2}{x-1}=1$$

$$\iff x-1=1 \iff x=2.$$

Problem: Vi "tappar" roten $x=1$. Felet är att vi dividerar med $x-1$ som kan vara noll (och är det precis då $x=1$)!

Rätt sätt: $(x-1)^2=x-1 \iff (x-1)^2-(x-1)=0$

Faktorisera!

$$\iff (x-1)\big((x-1)-1\big)=0 \iff (x-1)(x-2)=0$$

$$\iff x=1 \text{ eller } x=2$$

Svar: Rötterna är $x=1$ och $x=2$.

Polynomekvationer:

Andragradsekvationer:

Ex: Lös ekvationen $x^2-x-2=0$!

Kvadratkomplettering!

> Kvadreringsregeln: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$$x^2-x-2=\Big(x^2+2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)x+\underbrace{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2\Big)-\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2}_{=0}-2=$$

(4)

$$=\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}-2=\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{9}{4}, \text{ så}$$

$$x^2-x-2=0 \iff \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{9}{4}=0$$

$$\iff \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{9}{4} \iff x-\tfrac{1}{2}=\pm\sqrt{\tfrac{9}{4}}=\pm\tfrac{3}{2}$$

OBS!

$$\iff x=\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{3}{2} \iff x=2 \text{ eller } x=-1$$

Allmänt: $x^2+px+q=0$

$$\iff \Big(x^2+2\cdot\tfrac{p}{2}x+\underbrace{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2\Big)-\left(\tfrac{p}{2}\right)^2}_{=0}+q=0$$

$$\iff \left(x+\tfrac{p}{2}\right)^2-\left(\tfrac{p}{2}\right)^2+q=0 \iff \left(x+\tfrac{p}{2}\right)^2=\left(\tfrac{p}{2}\right)^2-q$$

$$\iff x+\tfrac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2-q} \iff$$

$$\boxed{x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}}$$ "pq-formeln"

> Tidigare: Nollställen $\xleftrightarrow{\text{Faktorsatsen}}$ Faktorisering

Ex: Faktorisera $p(x)=3x^2+3x-18$!

Lös först ekvationen $p(x)=0$:

(5)

$$3x^2+3x-18=0 \iff x^2+x-6=0$$

$$\underset{\text{PQ-formeln}}{\iff} x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+6}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}$$

$$\iff x=-3 \quad \text{eller} \quad x=2$$

Enligt faktorsatsen gäller att (t.ex.) $x-(-3)=x+3$ delar $p(x)$. Polynomdivision ger

$$3x^2+3x-18=$$

$$=(x+3)(3x-6)=3(x+3)(x-2)$$

$$\begin{array}{l} \quad 3x-6 \\ \hline 3x^2+3x-18 \;\; \big| \; x+3 \\ -(3x^2+9x) \\ \hline \quad -6x-18 \\ \quad -(-6x-18) \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

OBS!

Svar: $p(x)=3(x+3)(x-2)$

Denna faktor svarar mot roten $x=2$.

> Om polynomet $p(x)$ som ges av
>
> $$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$
>
> har nollställena $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ (alla α_i olika), så får vi
>
> $$p(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$$

Har ett polynom av grad n alltid n rötter?

(6)

Ekvationer av högre grad:

Ex: Lös ekvationen $p(x)=x^3-3x^2+4=0$!

Vi börjar med att "gissa" ett nollställe, och ser att $x=-1$ är ett sådant (kolla!). Faktorsatsen ger då att $x-(-1)=x+1$ delar $p(x)$. Polynomdivision ger

$$p(x)=(x+1)(x^2-4x+4).$$

$$p(x)=0 \iff \underset{\text{eller}}{\begin{cases} x+1=0 \\ x^2-4x+4=0 \end{cases}} \iff \text{eller} \begin{cases} x=-1 \\ x=2\pm\sqrt{(-2)^2-4} \\ \quad =2\pm 0=2 \end{cases}$$

Svar: Rötterna är $x=-1$ och $x=2$.

Ex: Faktorisera $p(x)$ ovan!

$$p(x)=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2$$

multiplicitet 1 (enkelrot) multiplicitet 2 (dubbelrot) □

> Ett polynom av grad n har alltid högst n st. rötter, men kan ha färre då samma rot kan förekomma i högre multiplicitet.

Ex: Faktorisera $p(x)=x^2+1$!

$$p(x)=x^2+1=0 \iff x=\pm\sqrt{-1} \quad \text{Går ej!}$$

(7)

Faktorsatsen ger att det inte går att faktorisera $p(x)$ i reella faktorer av mindre grad. (Rötter kan också "försvinna" på detta sätt.)

Olikheter:

Ex: Lös olikheten $\frac{x^2+4}{x}>x, \quad x\neq 0.$

Vi provar med $x\cdot\frac{x^2+4}{x}>x\cdot x \iff$

$x^2+4>x^2 \iff 4>0$ Alltid sant!

Detta betyder att alla x löser olikheten. Men sätt t.ex. $x=-1$:

$$VL=\frac{(-1)^2+4}{-1}=\frac{5}{-1}=-5, \quad HL=-1$$

Denna lösning är fel! Vad är problemet?

OBS!

$$1<2 \implies 3\cdot 1<3\cdot 2$$

$$1<2 \implies (-3)\cdot 1>(-3)\cdot 2$$

OBS!

> Multiplikation och division med negativa tal ändrar olikhetstecknets riktning!

Rätt sätt: $\frac{x^2+4}{x}>x \iff \begin{cases} x^2+4>x^2 & \text{då } x>0 \\ x^2+4<x^2 & \text{då } x<0 \end{cases}$

$x>0$: $4>0$ löses av alla x

$x<0$: $4<0$ löses av inga x

Svar: Alla $x>0$ löser olikheten

(8)

Alternativt sätt (teckentabell):

Ex: Lös olikheten $\frac{x^2}{x-4}>-x, \quad x\neq 4.$

$$\frac{x^2}{x-4}>-x \iff \frac{x^2}{x-4}+x>0$$

$$\iff \frac{x^2+x(x-4)}{x-4}>0 \iff \frac{2x^2-4x}{x-4}>0$$

$$\iff \frac{2x(x-2)}{x-4}>0$$

Faktorisera!

Teckentabell:

nollställen till täljare och nämnare

		0		2		4	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2x(x-2)}{x-4}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\cancel{\exists}$	$+$

faktorer

Svar: $0<x<2$ eller $x>4$.