Föreläsning 3

(1)

Teoribygget för plan geometri (forts.)

Axiom 1: Vinklar och sträckor kan tilldelas reella tal, och är additiva (och kan multipliceras med positiva tal).

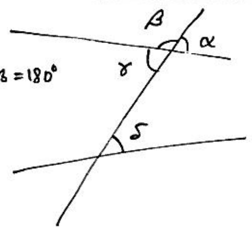
Definition 3:

α, β sidovinklar och $\alpha + \beta = 180°$

α, γ vertikalvinklar

α, δ likbelägna vinklar

γ, δ alternatvinklar



Sats 1: Vertikalvinklar är lika stora.

Bevis: Axiom 1 + Def. 3 ger

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 180° \\ \beta + \gamma = 180° \end{cases} \Rightarrow \alpha = 180° - \beta = 180° - (180° - \gamma) = \gamma$$

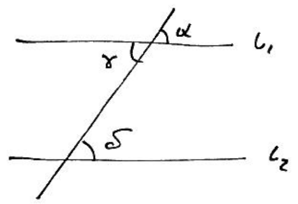
□

Axiom 2:

l_1 parallell med l_2

$\iff$

$\alpha = \delta$



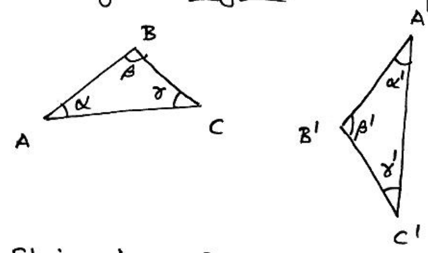
(2)

Sats 2: $l_1 \parallel l_2 \iff \gamma = \delta$

Bevis: Axiom 2 + Sats 1. □

Definition 4 (kongruens):

Två trianglar är kongruenta om



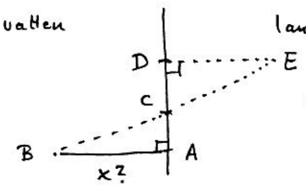
$$\begin{cases} AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ AC = A'C' \\ \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \end{cases}$$

Skrivs $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

Axiom 3: Två trianglar är kongruenta om något av följande fall gäller:

1. två sidor och mellanliggande vinkel lika (kongruensfall SVS)
2. alla sidor lika (SSS)
3. två vinklar och mellanliggande sida lika (VSV)

Ex:



Bestäm AB!

(3)

Markera C och D så att AC = CD (A antas vara känd). Gå vinkelrät mot kajen från D inåt land tills B och C är på samma räta linje (punkt E). Sträckan DE uppmäts till 11 m. $\angle BCA$ och $\angle DCE$ är vertikalvinklar

$$\underset{\text{Sats 1}}{\Rightarrow} \angle BCA = \angle DCE$$

$$\begin{cases} \angle BCA = \angle DCE \\ AC = CD \\ \angle BAC = \angle CDE \end{cases} \underset{\substack{\text{Axiom 3} \\ \text{(VSV)}}}{\Rightarrow} \Delta CAB \cong \Delta CDE$$

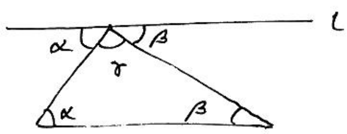
$\Rightarrow AB = DE = 11\,m$

Svar: 11 m.

Trianglar och fyrhörningar:

Sats 3: Vinkelsumman i en triangel är 180°.

Bevis:



Dra linje l genom ett hörn parallell med motstående sida. Sats 2 ger att alternatvinklar är lika (se figur!). Enligt figur gäller då att $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ □

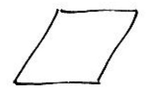
Sats 4 (Yttervinkelsatsen): Läs själva!

(4)

Definition 5,6 (Cirkel, fyrhörning): Läs själva!

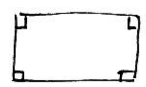
Definition 7 (fyrhörningar):

parallellogram (motst. sidor parallella)

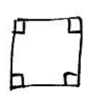


romb (alla sidor lika långa)

parallelltrapets (två motst. sidor parallella)



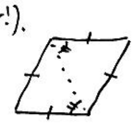
rektangel (alla vinklar räta)



kvadrat (alla vinklar räta, alla sidor lika långa)

Sats 5: En romb är en parallellogram

Bevis: Dra en diagonal i romben (se figur!). Enligt definition av romb är markerade sidor lika långa. De två trianglarna i

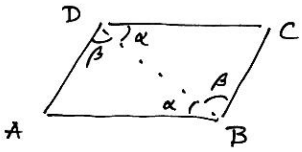


figuren är därför kongruenta enligt kongruensfall SSS. (5)
Då följer det att markerade alternatvinklar i figuren är lika. Enligt Axiom 2 är då den övre och undre sidan parallella. Motsv. resonemang för de andra två sidorna ger då att romben är ett parallellogram. □

Sats 6 (Parallellogramsatsen):

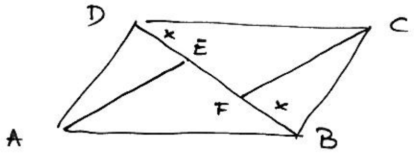
I en parallellogram är såväl motstående sidor som motstående vinklar lika stora.

Bevis: Låt ABCD vara en parallellogram (se figur!)



Dra diagonalen BD. ABCD parallellogram $\overset{\text{Def.7}}{\Rightarrow}$ AB // DC och AD // BC $\overset{\text{Axiom 2}}{\Rightarrow}$ alternatvinklarna är lika stora (se figur!) $\Rightarrow \angle B = \alpha + \beta = \angle D$.
Axiom 3 (VSV) ger att $\triangle ABD \cong \triangle CDB$. Alltså gäller att $AB = CD$ och $AD = CB$ samt $\angle A = \angle C$ □.

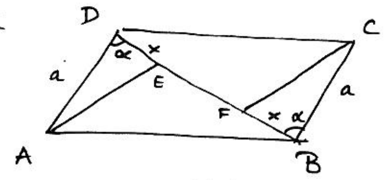
Ex: Låt ABCD vara en parallellogram.



Visa att, oavsett värde på x, så gäller (6)

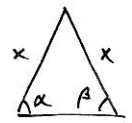
$$\triangle AED \cong \triangle CFB.$$

Bevis:



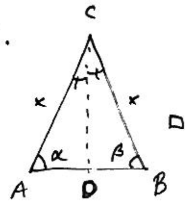
ABCD parallellogram $\overset{\text{Sats 6}}{\Rightarrow}$ $AD = BC = a$. Enligt def. är också AD och BC parallella. Axiom 2 ger då att alternatvinklar, α, är lika. Axiom 3 (SVS) ger nu att $\triangle AED \cong \triangle CFB$. □

Sats 7 (Satsen om likbent triangel)

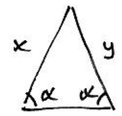


$\Rightarrow \alpha = \beta$

Bevis: Dra bisektris genom hörnet C.
Axiom 3 (SVS) ger att $\triangle ACD \cong \triangle BCD$
$\Rightarrow \alpha = \beta$ □

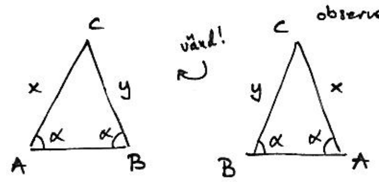


Sats 8 (Basvinkelsatsen):



$\Rightarrow x = y$

Bevis: Betrakta triangeln $\triangle ABC$ och $\triangle BAC$ (se figur!) (7)
observera ordningen!

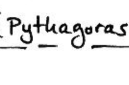


Dessa trianglar är kongruenta enligt Axiom 3 (VSV).
Alltså följer att $x = y$. □

Triangelns area och Pythagoras sats:

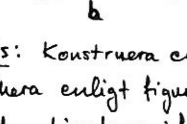
Areabegreppet (Axiom 5): Läs själva!

Sats 9 (Area av triangel): Läs själva!



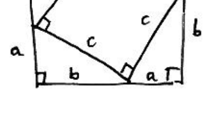
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Sats 10 (Pythagoras sats)



, α rät vinkel $\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

Bevis: Konstruera en kvadrat med sidan a+b, och markera enligt figur! Dra fyra räta linjer (se figur). De fyra trianglarna i figuren är kongruenta enligt Axiom 3 (SVS), alltså är alla hypotenusor lika med c. (Att vinklarna är räta



i den inre fyrhörningen följer av vinkelsumman i en triangel + kongruenserna) (8)
Vi kan uttrycka den yttre kvadratens area på två olika sätt:

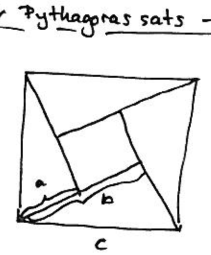
- $(a+b)^2$
- $c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 \quad \square$$

Sats 11 (Omvändningen till Pythagoras sats): Läs själva!

Alt. bevis för Pythagoras sats – Bhaskara



Area (stor kvadrat) $= c^2$

Area (delar) $= (b-a)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = b^2 + a^2 - 2ab + 2ab$
$= a^2 + b^2$

Detta ger $a^2 + b^2 = c^2$.