1

Föreläsning 7

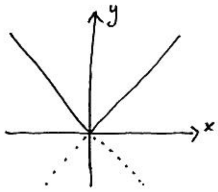
Absolutbelopp (forts.):

Def (absolutbelopp):

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Ex: Rita kurvan $y = |x|$!

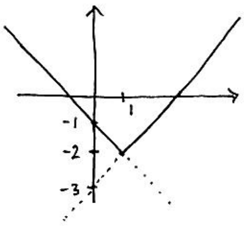
$$y=|x| \iff \begin{cases} y = x & \text{om } x \geq 0 \\ y = -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$



Ex: Rita kurvan $y = |x-1| - 2$!

$$y = |x-1|-2 \iff \begin{cases} y = x-1-2 & \text{om } x-1 \geq 0 \\ y = -(x-1)-2 & \text{om } x-1 < 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x-3 & \text{om } x \geq 1 \\ y = -x-1 & \text{om } x < 1 \end{cases}$$



Anm: Vi kan också tänka oss kurvan $y=|x|$ flyttad ett steg åt höger och två steg nedåt.

2

Ex: Lös ekvationen $|x-2| = 3x+2$!

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{om } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{om } x < 2 \end{cases}$$

Dela upp i två fall:

$x \geq 2$: $\quad x-2 = 3x+2 \iff x = -2$ duger ej! $\;< 2$

$x < 2$: $\quad -(x-2) = 3x+2 \iff x = 0$ duger!

Svar: $x = 0$.

Ex: Lös ekvationen $|2x-1| + |x+1| = 2$!

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{om } x \geq 1/2 \\ -(2x-1) & \text{om } x < 1/2 \end{cases}, \quad |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{om } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{om } x < -1 \end{cases}$$

Uttrycken innanför absolutbeloppen byter tecken i $1/2$ och -1. Dela upp i tre fall:

$x \geq 1/2$: $\quad (2x-1)+(x+1) = 2 \iff 3x = 2 \iff x = \frac{2}{3}$ duger!

$-1 \leq x < 1/2$: $\quad -(2x-1)+(x+1) = 2 \iff x = 0$ duger!

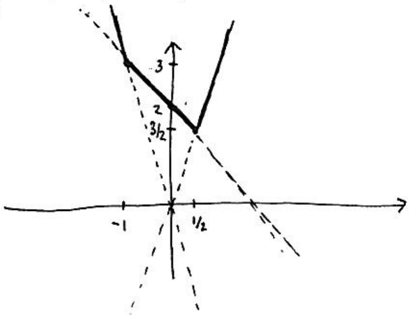
$x < -1$: $\quad -(2x-1)-(x+1) = 2 \iff -3x = 2 \iff x = -\frac{2}{3}$ duger ej!

Svar: $x = 2/3$ eller $x = 0$.

3

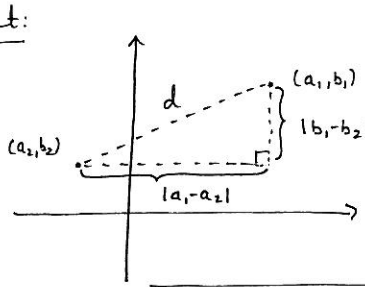
Ex: Rita kurvan $y = |2x-1| + |x+1|$!

$$\begin{cases} y = (2x-1)+(x+1) = 3x & \text{om } x \geq 1/2 \\ y = -(2x-1)+(x+1) = -x+2 & \text{om } -1 \leq x < 1/2 \\ y = -(2x-1)-(x+1) = -3x & \text{om } x < -1 \end{cases}$$



Avstånd i planet:

Bestäm avståndet mellan punkterna (a_1,b_1) och (a_2,b_2)!



Pythagoras sats:

$$d^2 = |a_1-a_2|^2 + |b_1-b_2|^2 \iff \boxed{d = \underset{(-)}{+}\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}}$$

Anm: $|a_1-a_2|^2 = (a_1-a_2)^2$, $|b_1-b_2|^2 = (b_1-b_2)^2$

4

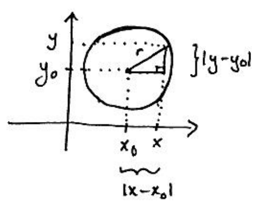
Ex: Bestäm avståndet mellan $(-3,4)$ och $(-1,1)$!

$$d = \sqrt{(-3-(-1))^2+(4-1)^2} = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{13}$$

Cirkel, ellips och hyperbel:

En cirkel med medelpunkt (x_0,y_0) och radie r består av alla punkter (x,y) vars avstånd till (x_0,y_0) är r. Pythagoras sats ger (igen!)

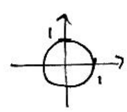
$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2}$$



Kallas cirkelns ekvation.

Ex: Enhetscirkeln är cirkeln med radie 1 och medelpunkt origo (dvs. $(0,0)$). Ekvationen blir därför

$$x^2+y^2 = 1$$



Ex: Skissera kurvan som ges av ekvationen

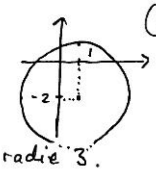
$$x^2-2x+y^2+4y-4 = 0 \quad !$$

Kvadratkomplettera x:en och y:na var för sig:

$$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4-4 = 0 \iff$$

$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2+(y-(-2))^2=3^2$



En cirkel med medelpunkt $(1,-2)$ och radie 3.

Ex: Bestäm skärningen mellan linjen $y=2x+1$ och cirkeln $(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$!

Vi vill lösa
$$\begin{cases} y=2x+1 & (1) \\ (x-1)^2+(y+2)^2=9 & (2) \end{cases}$$

Ersätt y med $2x+1$ i ekv. (2):

$$(x-1)^2+((2x+1)+2)^2=9$$

$\Leftrightarrow \quad x^2-2x+1+(2x+3)^2=9 \Leftrightarrow x^2-2x+1+4x^2+12x+9=9$

$\Leftrightarrow \quad 5x^2+10x+1=0 \Leftrightarrow x^2+2x+\frac{1}{5}=0$

$\Leftrightarrow \quad x=-1\pm\sqrt{1^2-\frac{1}{5}}=-1\pm\sqrt{\frac{4}{5}}=-1\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

Sätt in dessa x-värden i ekv. (1) (OBS!)

$$y=2x+1=2\left(-1\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+1=-1\pm\frac{4}{\sqrt{5}}$$

Svar: Två skärningspunkter, nämligen

$$\left(-1+\frac{2}{\sqrt{5}},-1+\frac{4}{\sqrt{5}}\right) \text{ och } \left(-1-\frac{2}{\sqrt{5}},-1-\frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

□

Ex: Skissera kurvan som ges av ekvationen

$$\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\frac{y^2}{9}-\frac{3}{4}=0 \qquad (*)$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\frac{y^2}{9}-\frac{3}{4}=\frac{x^2-2x}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{3}{4}=$$

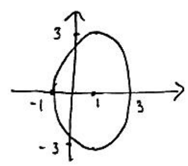
$$=\frac{(x-1)^2-1}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{3}{4}=\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1$$

Detta ger $(*) \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1^2$$

Detta motsvarar en cirkel med medelpunkt $(1,0)$ och radie 1, men faktorerna 2 och 3 innebär att cirkeln "töjs" med faktorn 2 i x-led och faktorn 3 i y-led. En ellips! Talen 2 och 3 kallas ellipsens halvaxlar.

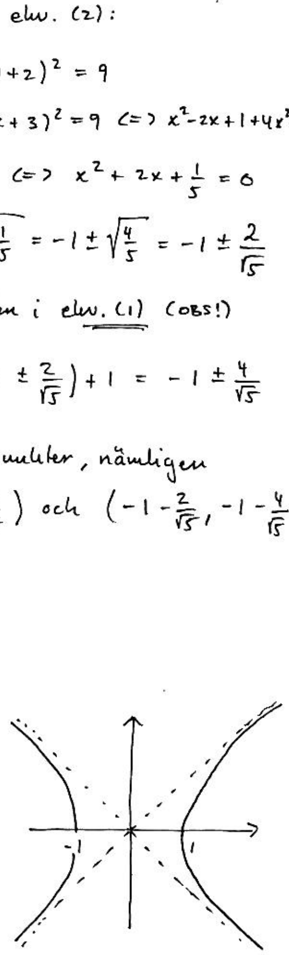
Ellips:
$$\boxed{\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1}$$



Hyperbel:

Ex: Betrakta kurvan $x^2-y^2=1$!

Kallas hyperbel.
De har två "grenar".



Vad händer med kurvan då $|x|$ är stort?

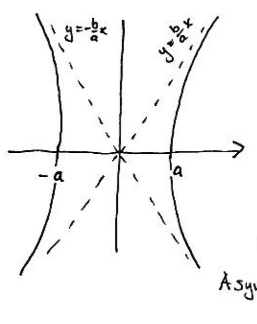
$x^2-y^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2=x^2-1 \quad \Leftrightarrow \quad y=\pm\sqrt{x^2-1}$

Då $|x|$ är stort gäller $y\approx\pm\sqrt{x^2}=\pm|x|$

Linjerna $y=\pm x$ (se figur!) kallas asymptoter till kurvan.

Hyperbel:
$$\boxed{\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=\pm 1}$$

Ex: Hur ser hyperbeln $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ut?
Vilka blir asymptoterna?



Då $|x|$ stort har vi kurvan

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\approx 0$$

som en god approximation.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}$

$\Leftrightarrow \quad y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y=\pm\frac{b}{a}|x|$

Asymptoter: $y=\pm\frac{b}{a}x$.